Reimers

LEHRBRIEFE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM

HERAUSGEGEBEN
VON DER ZENTRALSTELLE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM
DES MINISTERIUMS FÜR HOCH- UND FACHSCHULWESEN

Signalanalyse

2. LEHRBRIEF

02 1471 02 1

Signalanalyse

2. Lehrbrief

Verfaßt von
Prof. Dr.-Ing. habil. Wolfgang K r a a k
Technische Universität Dresden
Sektion Informationstechnik

02 1471 02 1

Lektor: Dr.-Ing. Prescher

Redaktionsschluß: März 1987

Druck und buchbinderische Verarbeitung:
Zentralstelle für Lehr- und Organisationsmittel des
Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen, Zwickau
Ag 628/62/88/DDR/700 - ZLO 639/88

2. Ausgabe 1. Auflage

Bestell-Nr. 02 1471 02 1

Verfaßt für die Zentralstelle für das Hochschulfernstudium des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen Dresden.

Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen Republik von der Zentralstelle für das Hochschulfernstudium Dresden.

Inhaltsverzeichnis

		Seite
5.	Hilberttransformation	5
5.1.	Die Hilberttransformation im Zeit- und Frequenzbereich	5
5.2.	Die Hilberttransformation zur Bestimmung des Hüllkurvenverlaufes von Impulsantworten	8
5.3.	Zusammenhang von Betrags- und Phasenspektrum bei Minimalphasensystemen	15
5.4.	Aufgaben	18
6.	Das Abtasttheorem	18
6.1.	Abtastung im Zeitbereich	18
6.2.	Aliasingfehler	22
6.3.	Das Abtasttheorem für bandbegrenzte Zeitfunktionen, wenn die untere Grenzfrequenz nicht bei Null liegt	24
6.4.	Praktische Anwendung - Abtastung und Rekonstruktion	25
6.5.	Das Abtasttheorem im Frequenzbereich	26
7.	Diskrete Transformationen	27
7.1.	Allgemeine diskrete Transformationen für Orthogonalsysteme	27
7.2.	Diskrete Fouriertransformation	30
7.3.	Schnelle Transformationen	35
7.3.1.	Allgemeines	35
7.3.2.	Schnelle Fouriertransformation (Fast Fourier Transform - FFT)	35
7.3.3.	Schnelle Hadamard-Transformation	42
7.4.	Z-Transformation und Digitalfilter	44
8.	Cepstrumanalyse	53
9.	Kennzeichnung von Signalen durch statistische Kenngrößen	60
9.1.	Allgemeine Eigenschaften stationärer ergodischer Vorgänge	60
9.2.	Korrelationsfunktionen	62
9.2.1.	Erläuterung des Begriffes Korrelationsfunktion	62
9.2.2.	Die Autokorrelationsfunktion	64
9.2.3.	Zusammenhang zwischen Leistungsspektrum und Korrelationsfunktion	65
9.2.4.	Die Autokorrelationsfunktion der periodischen Zeitfunktion	66

Seite

9.2.5. Die Autokorrelationsfunktion des Bandpaß-rauschens 67

9.2.6. Korrelation mit Modellfunktion (Musterkorrelation und Mehrdeutigkeitsfunktion) 70

9.2.7. Technische Realisierung 72

5. Hilberttransformation

Die Hilberttransformation, benannt nach dem deutschen Mathematiker Hilbert (1862 - 1943), ist ein nützliches mathematisches Werkzeug, um natürliche reellwertige Zeitfunktionen durch imaginäre Ergänzungen in komplexe Funktionen umzuwandeln und um damit die Interpretation von Signalen aus dem Zeitbereich zu erleichtern (Thrane (1984)). In der komplexen Übertragungsfunktion linearer Zweitore ist durch sie eine minimale Phasenbeziehung festgelegt (Biering, Pedersen (1983); Wunsch (1969)).

Die mathematische Grundlage für die Verknüpfung von Real- und Imaginärteil regulärer komplexer Funktionen sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
Ist $w = f(x + j\,y) = u(x, y) + j\,v(x, y)$ eine komplexe, in einem Gebiet G reguläre Funktion, dann gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Realteil und Imaginärteil der regulären Funktion stehen also in einem bestimmten funktionellen Zusammenhang zueinander. Realteil und Imaginärteil der Funktion lassen sich aus dem jeweils anderen Teil berechnen.

5.1. Die Hilberttransformation im Zeit- und Frequenzbereich

Die Hilberttransformierte einer Zeitfunktion x(t) ist das Faltungsprodukt

$$\mathrm{HT}\ x(t) = x_H(t) = x(t) * \frac{1}{\pi\, t}\,, \tag{5.1}$$

$$x_H(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \frac{1}{t - \tau}\, d\tau\,. \tag{5.2}$$

Die unabhängige Variable der Hilberttransformierten ist also wiederum die Zeit. Während die Fouriertransformierte eine Zeitfunktion in den Frequenzbereich abbildet, bleibt bei der Hilberttransformation der originale Bereich (z. B. Zeit oder Frequenz) unverändert.

Die Hilberttransformation wird anschaulicher durch Darstellung im Frequenzbereich. Hierzu sei erinnert an die wechselseitigen Beziehungen

$$x(t) * y(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \underline{X}(f) \cdot \underline{Y}(f) , \qquad (5.3)$$

$$x(t) \cdot y(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \underline{X}(f) * \underline{Y}(f) ,$$

$x(t)$, $y(t)$ Zeitfunktionen,
$\underline{X}(f) = FT\ x(t)$, $\underline{Y}(f) = FT\ y(t)$ Fouriertransformierte der Zeitfunktionen.

> Einer Faltung zweier Zeitfunktionen im Zeitbereich entspricht eine Multiplikation ihrer Fouriertransformierten im Frequenzbereich und umgekehrt.

Zur Bestimmung der Fouriertransformierten von $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ ist es sinnvoll, die Signum-Funktion zu verwenden:

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} +1 & \text{für } t > 0 \\ -1 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Es ist dann (zeigen Sie die Richtigkeit!):

$$FT\ \operatorname{sgn} t = \frac{1}{j \pi f}$$

und

$$FT\left\{ -\frac{1}{j \pi t} \right\} = \operatorname{sgn} f . \qquad (5.4)$$

Aus den Gleichungen (5.1), (5.3) und (5.4) folgt

$$FT\left\{ x(t) * \frac{1}{\pi t} \right\} = FT\ x(t) \cdot FT\ \frac{1}{\pi t} ,$$

$$FT\ x_H(t) = \underline{X}_H(f) = \underline{X}(f) \cdot (-j \operatorname{sgn} f) .$$

> Im Frequenzbereich der Hilberttransformierten einer Zeitfunktion $x(t)$ sind somit alle Frequenzbestandteile $\underline{X}(f)$ dieser Zeitfunktion um $-j \mathrel{\hat{=}} -\frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} -90^{\circ}$ bei positiven Frequenzen und um $+j \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} +90^{\circ}$ bei negativen Frequenzen gedreht.

Bild 5.1 zeigt schematisch die Zusammenhänge zwischen einer Zeitfunktion und ihrer Hilberttransformierten im Zeit- und Frequenzbereich.

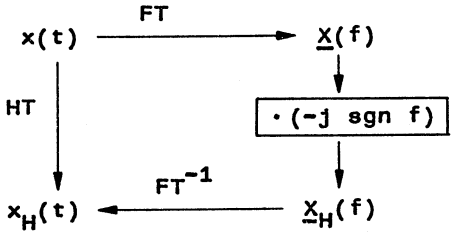


Bild 5.1 Schematische Darstellung der Hilberttransformation über Fouriertransformation

Beispiel:

Für die Zeitfunktion $x(t) = \cos \omega_0 t$ wird die Hilberttransformierte gesucht.

$$\mathrm{HT} \cos \omega_0 t = \mathrm{FT}^{-1} \left\{ -j \operatorname{sgn} f \cdot \mathrm{FT} \cos \omega_0 t \right\},$$

$$\mathrm{FT} \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} \left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \right],$$

$$x_H(t) = -\frac{j}{2} \left\{ \int_0^{\infty} \delta(f - f_0)\, e^{j\omega t}\, df - \int_{-\infty}^{0} \delta(f + f_0)\, e^{j\omega t}\, df \right\},$$

$$x_H(t) = -\frac{j}{2} \left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t} \right),$$

$$x_H(t) = \mathrm{HT} \cos \omega_0 t = \sin \omega_0 t. \qquad (5.5)$$

Enteprechend ist $\mathrm{HT} \sin \omega t = -\cos \omega t$.

Die numerische Berechnung der Hilberttransformierten mit digitaler Rechentechnik erfolgt zweckmäßig unter Anwendung des FFT-Algorithmus nach Abschnitt 7.3.2. und des Schemas nach Bild 5.1.

Die inverse Hilberttransformation ist definiert durch

$$x(t) = \mathrm{HT}^{-1}\, x_H(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x_H(\tau)\, \frac{1}{t - \tau}\, d\tau,$$

$$\underline{X}(f) = \underline{X}_H(f)\ (j \operatorname{sgn} f).$$

Die inverse Hilberttransformation dreht somit die Phase in umgekehrter Richtung wie die Hilberttransformation selbst.

5.2. Die Hilberttransformation zur Bestimmung des Hüllkurvenverlaufes von Impulsantworten

Impulsantworten bzw. Gewichtsfunktionen werden neben Übertragungsfunktionen zur Kennzeichnung des Übertragungsverhaltens linearer zeitinvarianter Systeme verwendet (siehe Anhang 1 und 2, Lehrbrief 3). Wird zur Kennzeichnung von elektrischen Vierpolen, von elektroakustischen Geräten, bei der Untersuchung der mechanischen Schwingungen von Maschinen und Verkehrsmitteln und in zahlreichen anderen Fällen der Übertragungsfunktion bei der Systemanalyse der Vorzug gegeben, so wird vergleichbar häufig in anderen Anwendungsfällen die Impulsantwort zur Systemanalyse verwendet.

Die Impulsantwort wird vor allen Dingen dann das Übertragungsverhalten eines Systems (Zweitores) vorteilhaft beschreiben, wenn dieses eine komplizierte räumliche Struktur besitzt. So sind bei raumakustischen Untersuchungen aus den mit einem Kunstkopf zweikanalig gemessenen Impulsantworten quantitative Aussagen über Verständlichkeit und Hörempfindungen in Räumen möglich. Auch bei den zahlreichen Ortungsverfahren sind es Impulsantworten, die analysiert werden. Beispiele hierfür sind: hydroakustische Ortung (Sonar = sound navigation and ranging), Funkortung (Radar = radio detection and ranging), Ultraschallmaterialprüfung, Ultraschalldiagnose in der Medizin, geologische Ortung. Sogar in der objektiven Audiometrie (ERA = electric response audiometry) werden Impulsantworten untersucht, wenn auch hier für einen extrem nichtlinearen Organismus.

Häufig interessiert bei der Analyse von Impulsantworten aber nicht der detaillierte Verlauf, sondern eher der Hüllkurvenverlauf. Werden zum Beispiel in der Ortungstechnik kurze, sinusförmige Tonbursts abgestrahlt (gesendet), dann interessiert im Empfangssignal nur die Hüllkurve um die gleichgerichteten, vom Ortungsgegenstand reflektierten Impulse. Mitunter wird deshalb das Empfangssignal gleichgerichtet oder quadriert (auch mit einer noch höheren Potenz als zwei bewertet), und es wird dann mit einem Tiefpaß die Hüllkurve gebildet.

Eine andere, in modernen Meßgeräten angewendete Methode zur Hüllkurvenbildung ist die Umwandlung des reellwertigen kausalen Antwortsignals durch Hinzufügen einer imaginären Ergänzung in ein analytisches (komplexes) Signal (Thrane (1984)). Bildet man

dann den Betrag aus Real- und Imaginärteil, dann erhält man den logarithmierbaren Hüllkurvenverlauf. Die Logarithmierung (Pegelbildung) läßt dann Details in der Impulsantwort erkennen, die bei linearer Darstellung, und mehr noch bei Bewertung durch Potenzfunktionen, verlorengehen. (Allerdings kann auch bei Gleichrichtung oder Bewertung durch Potenzbildung - nach Tiefpaßfilterung - Logarithmierung erfolgen.)
Wir wollen ein Signal $x(t)$ kausal nennen, wenn es von einem kausalen System stammt. Wird ein kausales System mit einem bei $t = 0$ beginnenden Signal erregt, dann muß die Systemantwort $x(t)$ für $t < 0$ verschwinden.
Ein kausales Signal kann nach Bild 5.2 in ein gerades (symmetrisches) Signal $x_g(t)$ und ein ungerades (schiefsymmetrisches) Signal $x_u(t)$ zerlegt werden:

$$x(t) = x_g(t) + x_u(t)$$

mit $x_g(t) = \frac{1}{2} x(t)$ für $t \geq 0$, $x_g(t) = x_g(-t)$ für $t < 0$

und $x_g(t) = x_u(t) \operatorname{sgn} t$. (5.6)

Es wird dann

$$\text{FT } x_g(t) = X^{\perp}(f), \quad \text{FT } x_u(t) = j\, X^{\shortparallel}(f) \text{ und}$$

$$\text{FT } x(t) = \underline{X}(f) = X^{\perp}(f) + j\, X^{\shortparallel}(f) .$$

Wegen Gl. (5.6) ist

$$\text{FT } x_g(t) = \text{FT}\left\{x_u(t) \operatorname{sgn} t\right\}$$

$$X^{\perp}(f) = X^{\shortparallel}(f) * \frac{1}{j \pi f} ,$$

$$\boxed{X^{\perp}(f) = \text{HT } X^{\shortparallel}(f) .} \qquad (5.7)$$

In der Fouriertransformierten (Amplitudendichte) eines kausalen Signals sind Realteil und Imaginärteil nicht voneinander unabhängig. Sie stehen in einer durch die Hilberttransformation gegebenen Beziehung zueinander.
Da in kausalen Systemen die Übertragungsfunktion Fouriertransformierte der Gewichtsfunktion (kausales Signal) ist, sind somit auch Real- und Imaginärteil der Übertragungsfunktion durch die Hilberttransformation miteinander in Beziehung gesetzt.

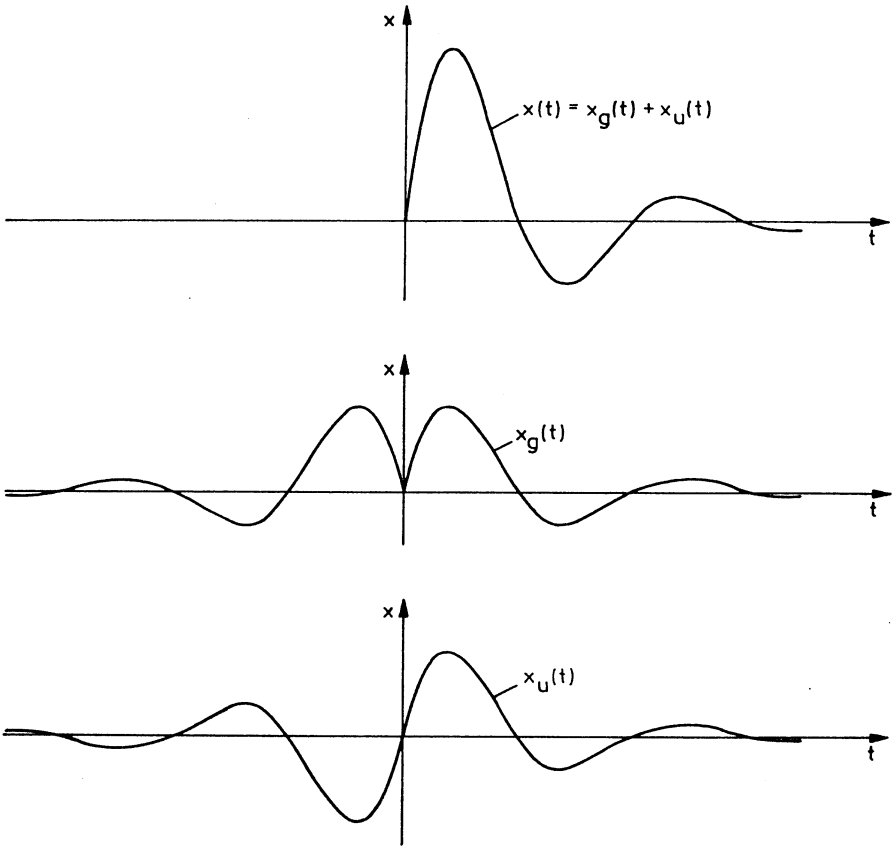


Bild 5.2 Kausales Zeitsignal x(t), zusammengesetzt aus geradem Teilsignal $x_g(t)$ und ungeradem Teilsignal $x_u(t)$

Wird ein kausales reellwertiges Signal x(t) durch seine Hilberttransformierte $x_H(t)$ imaginär ergänzt, so wollen wir dieses komplexe Signal als analytisches Signal $\underline{x}(t)$ bezeichnen:

$$\underline{x}(t) = x(t) + j\, x_H(t),$$

$$\underline{x}(t) = |\underline{x}(t)|\, e^{j\theta(t)}.$$

Der Betragsverlauf dieses analytischen Signals $|\underline{x}(t)|$ hat die Eigenschaft einer die Betragsfunktion des reellen Originalsignals $|x(t)|$ Einhüllenden:

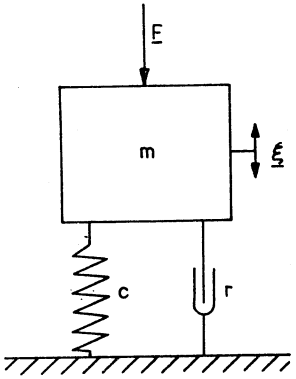
$$|\underline{x}(t)| = \sqrt{x^2(t) + x_H^2(t)} \ .$$

Die momentane Phase von $\underline{x}(t)$ ist

$$\theta(t) = \arctan \frac{x_H(t)}{x(t)}$$

und die momentane Frequenz

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} \ .$$



$\underline{F}$ auf das System einwirkende Kraft,
$\underline{\xi}$ Ausschlag (Verrückung),
m Masse,
c Federsteifigkeit,
r Reibungswiderstand

Bild 5.3 Mechanisches Schwingungssystem mit einem Freiheitsgrad

Beispiel

Komplexe Impulsantwort eines mechanischen Systems mit einem Freiheitsgrad.

Für ein mechanisches System nach Bild 5.3 wird

$$\underline{F} = \left(j\omega m + \frac{c}{j\omega} + r\right) j\omega \underline{\xi} \ .$$

Hieraus folgt die Übertragungsfunktion

$$\underline{A}(\omega) = \frac{\underline{\xi}}{\underline{F}} = -\frac{1}{2\omega_d m}\left(\frac{1}{\omega - \underline{\omega}_1} - \frac{1}{\omega - \underline{\omega}_2}\right)$$

mit $$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2} \ , \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m} \ , \quad \delta = \frac{r}{2m} \ ,$$

$$\underline{\omega}_{1,2} = j\delta \pm \omega_d \ .$$

Die Gewichtsfunktion (Impulsantwort auf den Einheitsstoß) ist dann (statt $g_E(t)$ hier $g(t)$ geschrieben)

$$g(t) = FT^{-1}\ \underline{A}(\omega)\ ,$$

$$g(t) = \frac{1}{\omega_d\ m}\ e^{-\delta t}\ \sin \omega_d\ t \quad \text{für} \quad t \geq 0\ ,$$

$$g(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0\ .$$

Mit $\underline{A}_H(\omega) = \underline{A}(\omega)\ (-j\ \mathrm{sgn}\ f)$ wird die imaginäre Ergänzung

$$g_H(t) = -\frac{1}{\omega_d\ m}\ e^{-\delta t}\ \cos \omega_d\ t \quad \text{für} \quad t \geq 0$$

und die komplexe Gewichtsfunktion

$$\underline{g}(t) = g(t) + j\ g_H(t) = |\underline{g}(t)|\ e^{j\theta(t)} \quad \text{für} \quad t \geq 0$$

mit $|\underline{g}(t)| = \frac{e^{-\delta t}}{\omega_d\ m}$,

$$\theta(t) = \arctan \frac{1}{-\tan \omega_d\ t}\ ,$$

$$\theta(t) = -\frac{\pi}{2} + \omega_d\ t\ .$$

Die Momentanfrequenz ist dann, wie schon aus dem Verlauf von g(t) ersichtlich,

$$f(t) = \frac{1}{2\ \pi} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{\omega_d}{2\ \pi} = f_d\ .$$

Im Bild 5.4 sind Verlauf der Gewichtsfunktion, des Betrages der Gewichtsfunktion und des Betrages der analytischen Gewichtsfunktion für das Schwingungssystem nach Bild 5.3 gegenübergestellt.
Die Bilder 5.4c und 5.4d zeigen die einfache Repräsentation des Hüllkurvenverlaufes durch den Betrag der komplexen Zeitfunktion bzw. durch ihren Pegel. Aus dem linearen Pegelverlauf ist besonders leicht die Dämpfung des Systems zu bestimmen. Es ist zu beachten, daß der Hüllkurven- und der Pegelverlauf wichtige Eigenarten der Gewichtsfunktion verschleiern. Erst der zusätzliche Phasenverlauf (Bild 5.4e) zeigt in diesem Beispiel, daß der Hüllkurvenverlauf einen Schwingungsvorgang repräsentiert.

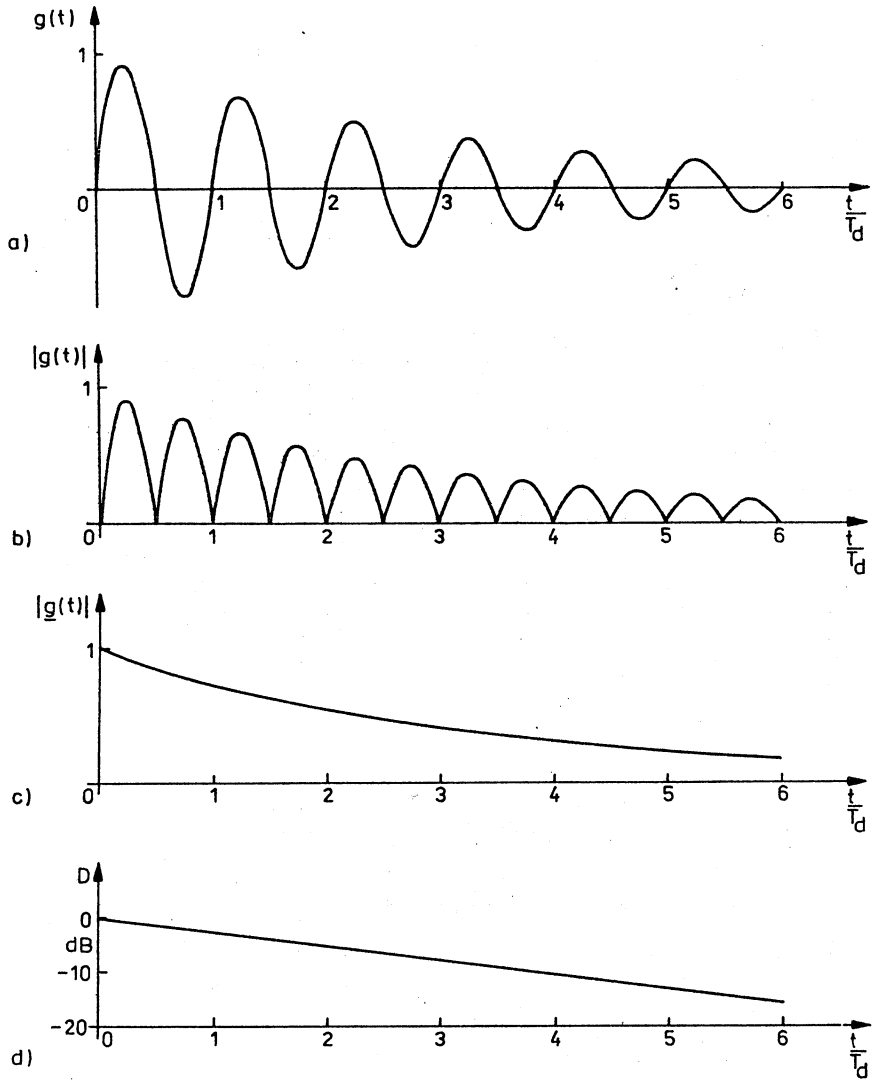


Bild 5.4 Darstellungen der Gewichtsfunktion eines Schwingungssystems nach Bild 5.3 ($\delta = 0{,}3\ f_d$)

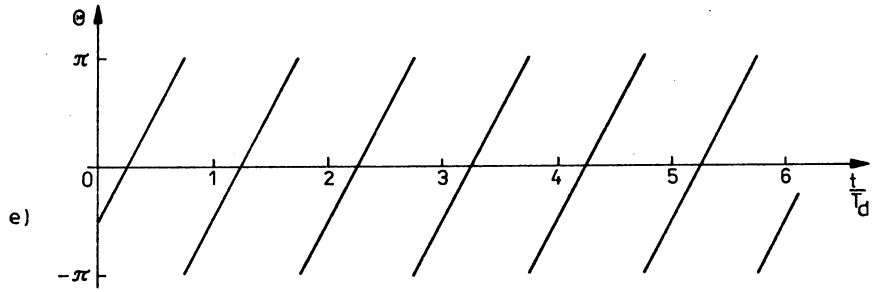
$T_d = \frac{1}{f_d}$, $f_d = \frac{\omega_d}{2\pi}$ Eigenfrequenz des Schwingungssystems

a) reellwertige Gewichtsfunktion g(t)

b) Betrag der reellwertigen Gewichtsfunktion $|g(t)|$

c) Betrag der analytischen Gewichtsfunktion $|\underline{g}(t)|$

d) Pegelverlauf $D = 20\ \lg\ (|\underline{g}(t)|\ \omega_d\ m)$ dB



e)

Bild 5.4 Darstellungen der Gewichtsfunktion eines Schwingungssystems nach Bild 5.3 ($\delta = 0{,}3\ f_d$) (Fortsetzung)

e) Phase der analytischen Gewichtsfunktion θ

Die Gewichtsfunktion linearer Minimalphasensysteme (siehe Abschnitt 5.3.), bestehend aus diskreten Elementen, kann als Linearkombination

$$g(t) = \sum_{i}^{N} A_i \, e^{-\delta_i t} \sin \omega_{di} \, t \qquad (5.8)$$

zusammengesetzt werden. Als analytische Funktion ergibt sich dann

$$\underline{g}(t) = \sum_{i}^{N} A_i \, e^{-\delta_i t} \, (\sin \omega_{di} \, t - j \cos \omega_{di} \, t) \, . \qquad (5.9)$$

Für die Betragsquadrate errechnet sich hieraus

aus Gl. (5.8):

$$|g(t)|^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} a_n \, a_m \left[\cos (\omega_n - \omega_m) \, t - \cos (\omega_n + \omega_m) \, t\right]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} a_n^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \cos 2 \omega_n \, t \, ,$$

aus Gl. (5.9):

$$|\underline{g}(t)|^2 = \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=n+1}^{N} a_n \, a_m \cos (\omega_n - \omega_m) \, t$$

mit $\sigma_{n,m} = a_i = A_i e^{-\sigma_i t}$.

Während das Betragsquadrat der originalen Gewichtsfunktion $|g(t)|^2$ alle möglichen Differenzfrequenzen, Summenfrequenzen und die doppelten Einzelfrequenzen enthält, sind im Betragsquadrat der analytischen Funktion $|\underline{g}(t)|^2$ nur die Differenzfrequenzen enthalten. $|\underline{g}(t)|$ wird also viel weniger schwanken als $|g(t)|$.
Bild 5.5 zeigt an einem Beispiel für zehn willkürlich gewählte Eigenfrequenzen eines Minimalphasensystems $|g(t)|$ und $|\underline{g}(t)|$. Obwohl $|\underline{g}(t)|$ weniger schwankt als $|g(t)|$, ist die bessere Eignung von $|\underline{g}(t)|$ für die Interpretation der Gewichtsfunktion nicht unbedingt gegeben. Es wird also nicht in jedem Anwendungsfall zweckmäßig sein, den Hüllkurvenverlauf aus der zur analytischen Funktion ergänzten Gewichtsfunktion zu bilden.

Wir wollen noch einmal auf das Beispiel von Abschnitt 5.1. zurückkommen. Da $e^{j\omega_0 t}$ eine analytische Funktion ist, ist der Imaginärteil dieser Funktion die Hilberttransformierte des Realteiles. Damit ist das Ergebnis Gl. (5.5) offensichtlich.

5.3. Zusammenhang zwischen Betrags- und Phasenspektrum bei Minimalphasensystemen

Die Gewichtsfunktion aller kausalen Zweitorsysteme ist eine kausale Funktion, also eine Funktion, die im negativen Zeitbereich verschwindet: $g(t) = 0$ für $t < 0$.
Nun ist nach Anhang 1, Lehrbrief 3, die Übertragungsfunktion $\underline{A}(\omega)$ aller linearen Zweitore die Fouriertransformierte der Gewichtsfunktion. Nach Abschnitt 5.2. ist dann

$$\underline{A}(\omega) = \mathrm{FT}\, g(t) = A^{\mathrm{I}}(\omega) + j\, A^{\mathrm{II}}(\omega),$$

$$A^{\mathrm{I}}(\omega) = \mathrm{HT}\, A^{\mathrm{II}}(\omega).$$

Realteil und Imaginärteil aller stationären linearen Zweitore hängen voneinander ab.
Schreibt man nun

$$\underline{A}(\omega) = |\underline{A}(\omega)|\, e^{j\theta(\omega)}$$

und logarithmiert auf beiden Seiten,

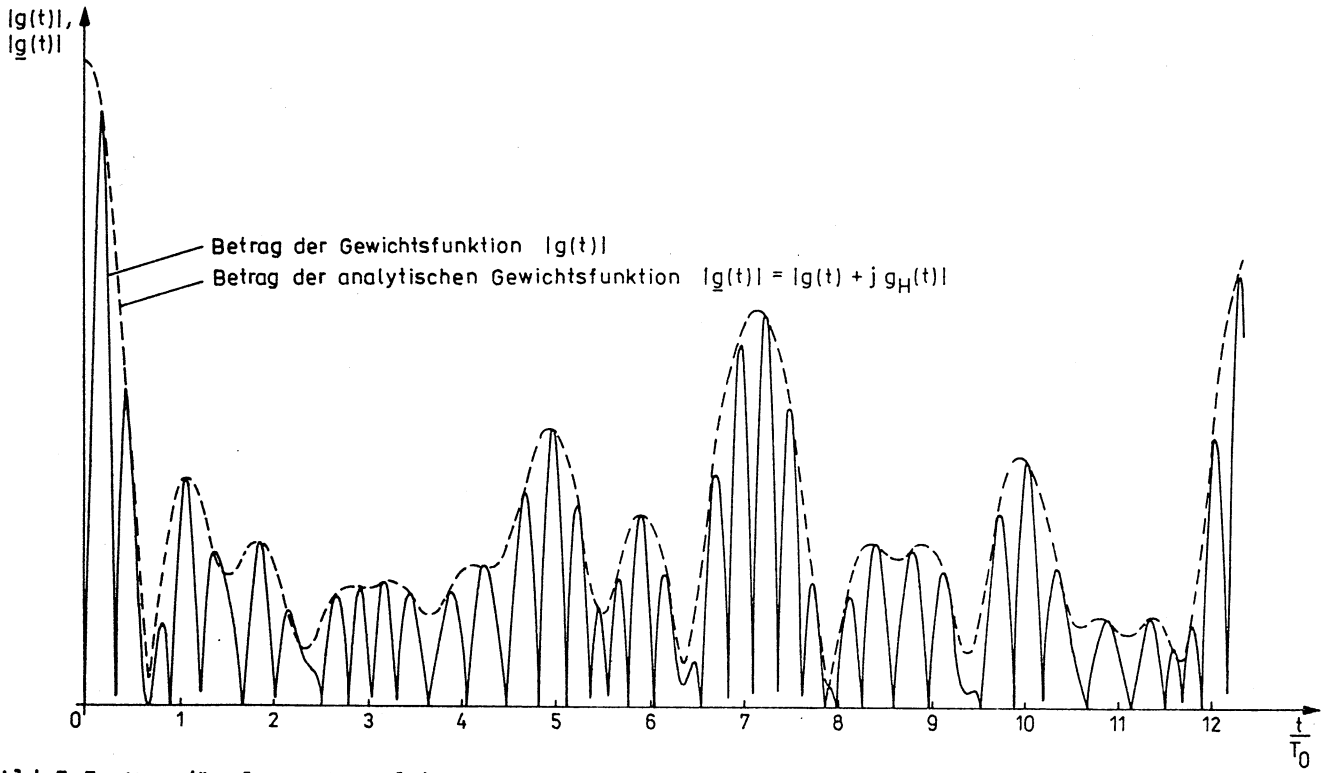


Bild 5.5 Ungedämpftes Minimalphasensystem ($\delta_i = 0$) mit 10 über ca. 1 Oktave willkürlich verteilten Eigenfrequenzen $\frac{\omega_i}{\omega_0}$ = 1; 1,07; 1,173; 1,203; 1,437; 1,578; 1,713; 1,795; 1,935; 2,07)
Ausgezogene Kurve: Betrag der Gewichtsfunktion; gestrichelte Kurve: Hüllkurvenverlauf (Verlauf des Betrages der analytischen Gewichtsfunktion). $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\ln \underline{A}(\omega) = \ln |\underline{A}(\omega)| + j\,\Theta(\omega) = \alpha(\omega) + j\,\Theta(\omega)\,,$$

dann kennzeichnet $\alpha(\omega)$ den Pegelverlauf des Betrages, und $\Theta(\omega)$ ist der Phasenverlauf der Übertragungsfunktion.
$\ln \underline{A}(\omega)$ ist eine reguläre und somit analytische Funktion, wenn $\underline{A}(\omega)$ keine Nullstellen besitzt (für Nullstellen geht $\alpha(\omega) \rightarrow \infty$).

> Ist die Bedingung, $A(\omega)$ besitzt keine Nullstellen, erfüllt, dann sind Realteil $\alpha(\omega)$ und Imaginärteil $\Theta(\omega)$, also Betrag und Phase, über die Hilberttransformation miteinander verknüpft.

Minimalphasensysteme erfüllen diese Bedingung. Für Minimalphasensysteme gilt somit

$$\alpha(\omega) = \mathrm{HT}\ \Theta(\omega)$$

mit $$\alpha(\omega) = \ln |\underline{A}(\omega)|\,,$$

$$\Theta(\omega) = \arg (\underline{A}(\omega))\,.$$

In Minimalphasensystemen können also Betrags- und Phasenverlauf nur in gegenseitiger Abhängigkeit verändert werden. Zum Beispiel sind Lautsprecher solche Minimalphasensysteme.
Allgemein können reale Systeme in Minimalphasensysteme und Allpaßsysteme aufgespalten werden:

$$\underline{A}(\omega) = \underline{A}_{\mathrm{min}}(\omega) \cdot \underline{A}_{\mathrm{allp}}(\omega)\,,$$

$\underline{A}_{\mathrm{min}}(\omega)$ Übertragungsfunktion eines Minimalphasensystems,
$\underline{A}_{\mathrm{allp}}(\omega)$ Übertragungsfunktion eines Allpaßsystems.
Häufig ist das Allpaßsystem ein reines Verzögerungsglied:

$$\underline{A}_{\mathrm{allp}}(\omega) = \alpha\, e^{-j\omega\tau_g(\omega)}$$

mit $\tau_g(\omega) = -\dfrac{d\Theta(\omega)}{d\omega}$ Gruppenlaufzeit.

Bei Signalausbreitung ohne Dispersion ist τ_g = konst.
Dispersionsfreie Signalausbreitung erfolgt zum Beispiel für Schallwellen und elektromagnetische Wellen in Luft. Es ist dann c_{ph} (Phasengeschwindigkeit) = c_g (Gruppengeschwindigkeit).
Beispiele für Signal- oder Energieausbreitung mit Dispersion sind Biegewellenausbreitung in Platten oder Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Kabeln.

Bei der Messung der Obertragungsfunktion von Lautsprechern im reflexionsarmen Raum kann das Allpaßsystem, das die Schallausbreitung vom Lautsprecher zum Meßort charakterisiert, vom Minimalphasensystem, das den Lautsprecher selbst charakterisiert, separiert werden. Beschreiben Sie, wie das sehr einfach und leicht möglich ist!
Zu bemerken ist noch, daß die Angabe von Gruppenlaufzeiten für Minimalphasensysteme sinnlos ist. Eine dennoch berechnete Gruppenlaufzeit für solche Systeme kann sowohl positive als auch negative (physikalisch sinnlose) Werte annehmen.

5.4. Aufgaben

Lösen Sie Aufgabe 12, Lehrbrief 3!

6. Das Abtasttheorem

6.1. Abtastung im Zeitbereich

Die numerische Analyse von Signalen, zum Beispiel auf Digitalrechnern, erfordert eine Abtastung der zu analysierenden kontinuierlichen Zeitfunktion zu diskreten Zeiten. Meist erfolgt dabei die Entnahme von Meßwerten in äquidistanten Zeitabschnitten.

Es wurde in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt, daß Zeitfunktionen in harmonische Bestandteile mit unterschiedlichen Frequenzen zerlegt werden können. Alle Signale, die physikalischen Vorgängen entstammen, haben eine obere Grenzfrequenz f_g. Harmonische Bestandteile mit Frequenzen oberhalb f_g können entweder bei einem gegebenen Vorgang nicht auftreten, oder sie sind infolge ihrer Geringfügigkeit ohne Interesse. Wir nehmen also an, wir haben eine Zeitfunktion x(t) vorliegen, die bei der Grenzfrequenz f_g bandbegrenzt ist. Sie werde nach Bild 6.1 in äquidistante Zeitabschnitte Δt zerlegt.

Zu den Zeiten $k\,\Delta t$ (k ganzzahlig) werden von der Zeitfunktion x(t) die Abtastwerte $x(k\,\Delta t)$ entnommen. Diese Entnahme von Abtastwerten kann mathematisch so dargestellt werden, daß eine Einheitsimpulsfolge

$$\left\{\delta(k)\right\} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k \neq 0 \end{cases},$$

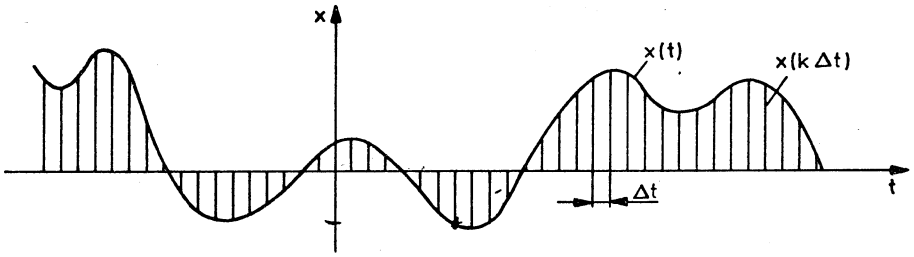


Bild 6.1 Zerlegung einer Zeitfunktion in äquidistante Zeitabschnitte

um jeweils k Δt zeitversetzt, mit der kontinuierlichen Zeitfunktion multipliziert wird:

$$x(k\,\Delta t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\,\Delta t)\,.$$

Die Zeitfunktion x(t) wird somit in x(k Δt) durch ihre Abtastwerte repräsentiert.
Ist die Zeitfunktion begrenzt, ist also $\sum_k x^2(k\,\Delta t) < \infty$, dann kann die Zeitfunktion durch die Sampling-Reihe dargestellt werden,

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\,\Delta t)\ si\ \omega_1\ (t - k\,\Delta t)\,,} \qquad (6.1)$$

wobei die Bedingung

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\Delta t} > \omega_g = 2\,\pi\,f_g$$

erfüllt sein muß. Aus dieser Bedingung folgt für die Abtastfrequenz

$$\boxed{f_A = \frac{1}{\Delta t} > 2\,f_g\,.} \qquad (6.2)$$

Die originale Zeitfunktion kann also nach Gl. (6.1) aus den Abtastwerten vollständig rekonstruiert werden, wenn die Abtastung in Zeitabständen $\Delta t < \frac{1}{2\,f_g}$ erfolgt.

Für die Energie des Vorganges x(t) gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^2(k\,\Delta t)\ . \qquad (6.3)$$

Gl. (6.3) ist sehr plausibel. Die rechte Seite stellt ja nur eine Summenschreibweise für das Integral auf der linken Seite dar.

Die Zeitfunktion wird in Gl. (6.1) durch eine unendliche Reihe von Abtastwerten, multipliziert mit gleichartigen, lediglich zeitverschobenen Spaltfunktionen dargestellt. Die Sampling-Reihe ist somit eine diskrete Faltung der Zeitfunktion mit der Spaltfunktion, die physikalisch als die Impulsantwort eines idealen Tiefpaßfilters mit der Grenzfrequenz $\frac{f_A}{2}$ interpretiert werden kann.

Wird ein kontinuierlicher Vorgang mit einer Grenzfrequenz f_g in einem begrenzten Zeitintervall von t_1 bis t_2 mit der Abtastfrequenz $f_A = 2\,f_g$ abgetastet, dann erfolgt durch die abklingende Spaltfunktion nach Bild 6.2 bei der Rekonstruktion durch die Sampling-Reihe eine gute Nachbildung weit ab von t_1 und t_2, aber eine schlechte Nachbildung in der Nähe der Grenzen. Die Ursache für die fehlerhafte Nachbildung ist darin zu suchen, daß der zeitbegrenzte Vorgang eine höhere Grenzfrequenz besitzt als der Originalvorgang, also nicht den Forderungen des Abtasttheorems entsprechend abgetastet wurde.

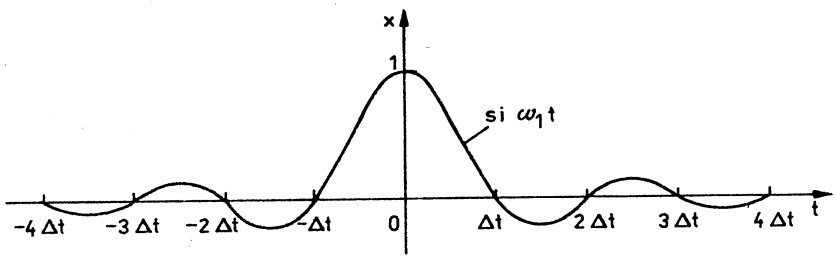


Bild 6.2 Spaltfunktion si ω_1 (t - k Δt) für k = 0

Betrachten wir als Beispiel die Sinusfunktion sin $2\pi f_0 t$. Sie besitzt eine Grenzfrequenz $f_g = f_0$. Wird diese Funktion mit $f_A = 2 f_0$ abgetastet, dann ist nach Bild 6.3a eine Rekonstruktion offensichtlich nicht möglich. Wird die Abtastfrequenz nur etwas höher gewählt als $2 f_0$, z. B. wie in Bild 6.3b $f_A = 2{,}2 f_0$, dann sind offensichtlich große Zeitabschnitte erforderlich, um die Originalfunktion aus den Abtastwerten nachbilden zu können. Dagegen ist aus Bild 6.3c ersichtlich, daß mit einer Abtastfrequenz $f_A = 10 f_g$ auch kurze Zeitabschnitte gut nachgebildet werden können.

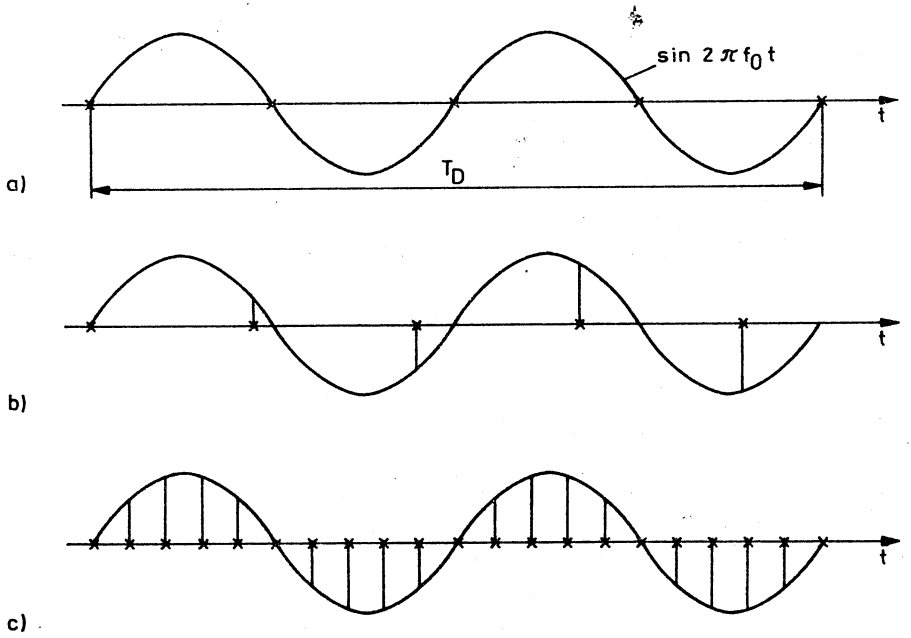


Bild 6.3 Abtastung begrenzter Zeitabschnitte aus der Sinusfunktion sin $2\pi f_0 t$

a) $f_A = 2 f_0 = 2 f_g$

b) $f_A = 2{,}2 f_g$

c) $f_A = 10 f_g$

Die Energiedifferenz $\Delta E = \int_{T_D} x^2(t)\,dt - \Delta t \sum_K x^2(k\,\Delta t)$ mit $K = \frac{T_D}{\Delta t}$ kann als ein Maß für die Güte der Nachbildung eines Ausschnittes der Dauer T_D aus einer Zeitfunktion angesehen werden. Für einen Ausschnitt aus einer Sinusfunktion nach Bild 6.3 der Länge $T_D = 2\,T_0$ ($T_0 = \frac{1}{f_0}$) ist $\Delta E < 5$ % für $f_A \approx 3\,f_0$ und $\Delta E < 0{,}1$ % für $f_A \approx 10\,f_0$. Beginnt und endet jedoch der Wellenzug im Maximum der Sinusfunktion, dann kann ΔE erheblich größer werden ($\Delta E \approx 30$ % für $f_A \approx 3\,f_0$ und $\Delta E \approx 6$ % für $f_A \approx 10\,f_0$). Ausschnitte aus zu analysierenden Zeitfunktionen werden deshalb mitunter so gewählt, daß sie mit Nulldurchgängen beginnen und enden, oder es werden Bewertungsfunktionen zur Zeitfensterung gewählt, die ein allmähliches Abklingen an den Zeitfenstergrenzen gewährleisten.

6.2. Aliasingfehler

Nichtbeachtung der Bedingung $f_A > 2\,f_g$ führt zu Frequenzverwerfungen, dem sog. Aliasingfehler. Es werden die Frequenzbestandteile einer Zeitfunktion, die oberhalb $f_g = \frac{f_A}{2}$ liegen, nach Abtastung und Rekonstruktion der Zeitfunktion aus den Abtastwerten in den Frequenzbereich unterhalb f_g "gefaltet". Wir wollen uns diesen Effekt an der schematischen Darstellung des Bildes 6.4 erklären. Die linke Seite von Bild 6.4 zeigt anschaulich die Entstehung der Zeitfolge der Abtastwerte $x(k\,\Delta t)$ durch Multiplikation der originalen Zeitfunktion $x(t)$ mit der Abtastfunktion, d. h. der Einheitsimpulsfolge $\delta(t - k\,\Delta t)$. Da einer Multiplikation im Zeitbereich eine Faltung im Frequenzbereich entspricht, ist auf der rechten Seite des Bildes 6.4 die Faltung des kontinuierlichen Spektrums eines Zeitfunktionsabschnittes $\underline{X}(f)$ mit dem Linienspektrum der periodischen Abtastfunktion $\underline{X}_\delta(f)$ dargestellt.
Für das schmalere Spektrum aus Bild 6.4a (ausgezogene Kurve) ist die Bedingung $f_A > 2\,f_g$ erfüllt. Im Faltungsprodukt (Bild 6.4c) sind die periodischen Frequenzbestandteile voneinander getrennt. Durch einen Tiefpaß mit der Grenzfrequenz $\frac{f_A}{2}$ wird aus der Abtastfolge wieder die originale Zeitfunktion rekonstruiert.

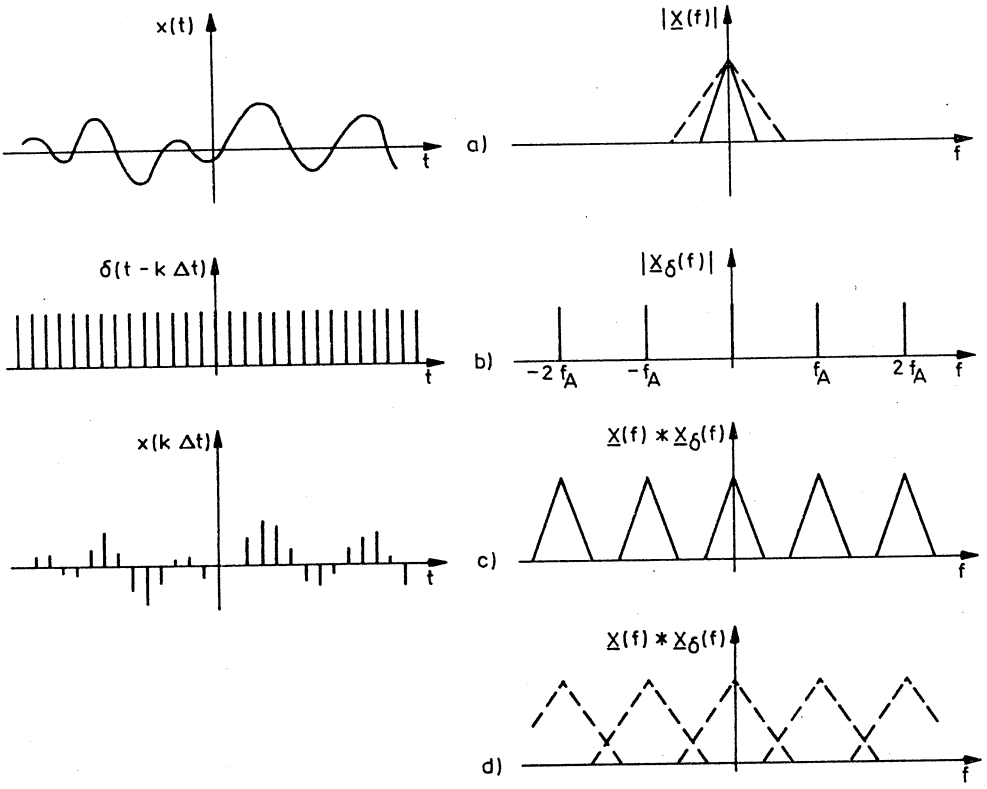


Bild 6.4 Entstehung von Frequenzverwerfungen

a) Zeitfunktion und zugehöriges Betragsspektrum

b) Abtastfunktion (Einheitsimpulsfolge) und zugehöriges Spektrum

c) Abtastwerte der Zeitfunktion und Spektrum unter der Bedingung $f_A > 2\ f_g$

d) Abtastwerte der Zeitfunktion und Spektrum unter der Bedingung $f_A < 2\ f_g$

Für das breitere Spektrum aus Bild 6.4a (gestrichelte Kurve) ist $f_A < 2\ f_g$. Im Faltungsprodukt (Bild 6.4d) überlappen sich die Frequenzbestandteile. Die originale Zeitfunktion ist aus der Folge der Abtastwerte nicht mehr einfach rekonstruierbar. Zur Vermeidung des Aliasingfehlers wird der abzutastende Zeitvorgang vor der Abtastung mit einem Tiefpaß (Antialiasingfilter) frequenzbegrenzt. Das Filter muß unter Berücksichtigung der

Flankensteilheit eine genügend tiefe Grenzfrequenz $f_g < \frac{f_A}{2}$ besitzen, so daß keine wesentlichen Frequenzbestandteile oberhalb $\frac{f_A}{2}$ im begrenzten Signal verbleiben.
Zu beachten ist: Durch die Filterung wird der zu analysierende Abschnitt aus der Zeitfunktion nicht nur in der Form verändert, sondern auch verlängert.

6.3. Das Abtasttheorem für bandbegrenzte Zeitfunktionen, wenn die untere Grenzfrequenz nicht bei Null liegt

Besitzt eine Zeitfunktion x(t) nur Frequenzanteile im Bereich f_1 bis f_2, wobei $f_1 > 0$ ist, dann ist diese Zeitfunktion vollständig durch Abtastwerte bestimmt, die im Abstand $\frac{1}{2(f_2 - f_1)}$ aufeinander folgen.

Es ist dann

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sqrt{x_k^2 + x_{Hk}^2}\ si\ \frac{\Delta\omega}{2}(t - k\,\Delta t)\ \cos\left[\omega_m(t - k\,\Delta t) - \Phi_k\right] \qquad (6.4)$$

mit

$\Delta\omega = 2\pi\,(f_2 - f_1)$, $\quad \Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta f}$,

$\omega_m = 2\pi\,\frac{f_2 + f_1}{2}$, $\quad \Phi_k = \arctan\frac{x_{Hk}}{x_k}$,

$x_k = x(\frac{2\pi k}{\Delta\omega}) = x(k\,\Delta t)$ Abtastwerte der Zeitfunktion,

$x_{Hk} = x_H(k\,\Delta t)$ Abtastwerte der Hilberttransformierten der Zeitfunktion, das ist nach Abschnitt 5. die Zeitfunktion mit um 90^0 ($\frac{\pi}{2}$) phasenverschobenen Frequenzanteilen.

Bei schmalen Frequenzbändern sind hier also wesentlich weniger Abtastwerte erforderlich als für den Fall $f_1 = 0$, der im Abschnitt 6.1. behandelt wurde. Hinzu kommt, daß hier nur ein Abtastabstand $\Delta t = \frac{1}{\Delta f}$ gefordert wird, gegenüber $\Delta t = \frac{1}{2\,\Delta f}$ bei $f_1 = 0$. Das hängt damit zusammen, daß hier durch die Bestimmung von x_k und x_{Hk} die doppelte Information verarbeitet wird.

Infolge des relativ großen Aufwandes bei der Abtastung und der Rekonstruktion der Zeitfunktion aus den Abtastwerten wird die Abtastung auf diese Art kaum angewendet. Es wird also in der Praxis auch bei bandbegrenzten Funktionen die Abtastung gemäß Gl. (6.2) vorgenommen.

6.4. Praktische Anwendung - Abtastung und Rekonstruktion

Die Abtastung von Zeitfunktionen erfolgt meist in Verbindung mit der Diskretisierung der Abtastwerte in Analog-Digital-Umsetzern (siehe Frühauf (1977)).
Die Rekonstruktion von analogen Zeitfunktionen aus Digitalwerten der Abtastfunktion erfolgt mit Digital-Analog-Umsetzern. Hierbei wird aus den Digitalwerten eine Rampenfunktion gebildet, die auf einen Tiefpaß mit einer Grenzfrequenz $f_g = \frac{f_A}{2}$ gegeben wird.

Am Ausgang des Tiefpasses erscheint eine der originalen Zeitfunktion proportionale Ausgangsspannung.
Zum Verständnis der Rekonstruktion wollen wir annehmen, daß kurze Spannungsimpulse $u_k(t)$ mit dem Zeitintegral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_k(t)\, dt \sim x(k\, \Delta t)$$

auf einen elektrischen Tiefpaß mit der Grenzfrequenz

$$f_g = \frac{1}{2\,\Delta t} = \frac{1}{2}\, f_A$$

gegeben werden. Die Breite τ der den Abtastwerten entsprechenden Spannungsimpulse $u_k(t)$ muß sein

$$\tau \ll \frac{1}{f_g} \qquad (\tau \leq \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{f_g}) .$$

Für einen idealen Tiefpaß mit der Grenzfrequenz f_g und der Laufzeit $t_L = 0$ ist die Gewichtsfunktion

$$g_E(t) = 2\, f_g\, si\, \omega_g\, t . \qquad (6.5)$$

Am Ausgang des Tiefpasses, an dessen Eingang die den Abtastwerten proportionale Impulsfolge liegt, entsteht dann der Spannungsverlauf

$$u(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\,\Delta t)\; 2\; f_g\; si\; \omega_1\,(t - k\,\Delta t) \qquad (6.6)$$

mit

$$\omega_1 = \omega_g = \frac{\pi}{\Delta t}\,.$$

Der Vergleich von Gl. (6.1) und Gl. (6.6) ergibt

$$u(t) \sim x(t).$$

Die Spannung am Ausgang des idealen Tiefpasses, auf dessen Eingang Spannungsimpulse mit dem Wert der Abtastwerte der Zeitfunktion gegeben werden, ist also proportional der originalen Zeitfunktion.

Bei realen Tiefpaßfiltern ist in der Gewichtsfunktion der Gleichungen (6.5) und (6.6) eine Laufzeitverschiebung zu berücksichtigen.

6.5. Das Abtasttheorem im Frequenzbereich

Ganz ähnlich wie im Zeitbereich kann das Abtasttheorem auch im Frequenzbereich angewendet werden.

Ist eine Funktion zeitbegrenzt, d. h., $x(t) = 0$, außer im Bereich $t_1 < t < t_2$, dann kann an Stelle von

$$\underline{X}(\omega) = FT\; x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\; e^{-j\omega t}\, dt$$

gesetzt werden:

$$\underline{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{X}(n\,\Delta\omega)\; si\; \frac{\pi}{\Delta\omega}\,(\omega - n\,\Delta\omega) \qquad (6.7)$$

mit

$$\Delta\omega = \frac{2\,\pi}{T} \rightarrow \Delta f = \frac{1}{T};\quad T = t_2 - t_1\,.$$

Es ist zu beachten: $\underline{X}(n\,\Delta\omega)$ sind die Abtastwerte der Amplitudendichte $\underline{X}(\omega) = FT\; x(t)$. Es ist $\underline{X}(n\,\Delta\omega) = T\;\underline{X}_n$ mit $\underline{X}_n$, den Koeffizienten der Fourierreihe nach Gl. (3.2).
Zusammenhänge zwischen Abtasttheorem im Zeit- und im Frequenzbereich siehe Abschnitt 7.3.

7. Diskrete Transformationen

Die numerische Ausführung von Transformationen erfolgt in diskreten Schritten. Gegenwärtig und in Zukunft werden Signaltransformationen für die praktische Analyse von Signalen in immer größerem Umfang auf Digitalrechnern oder mit Hilfe von digital arbeitenden speziellen Schaltkreisen durchgeführt.
Einen wesentlichen Fortschritt bei der digitalen Verarbeitung von Signalen haben die sog. schnellen Transformationen bewirkt, die etwa seit Beginn der 70er Jahre umfangreiche praktische Anwendung gefunden haben (siehe hierzu Abschnitt 7.3.2.). Insbesondere die Schnelle Fouriertransformation (Fast Fourier Transform - FFT) hat in der Signalanalyse sowie in zahlreichen anderen Zweigen der Mathematik, der Physik und der Technik besondere Bedeutung erlangt. Die schnellen Transformationen sind dabei lediglich Sonderformen der diskreten Transformationen, bei denen durch geeignete Rechenalgorithmen die Redundanz gemindert und damit der Rechenaufwand zum Teil erheblich herabgesetzt wird.

7.1. Allgemeine diskrete Transformationen für Orthogonalsysteme

Wir nehmen an, eine Funktion x(t), die nach Bild 7.1 in kontinuierlicher Darstellung vorliegt, soll im Bereich T analysiert werden, d. h. in diesem Fall, in orthogonale Funktionen zerlegt werden. Ähnlich wie im Abschnitt 3.5., ist das die Analyse der mit einer rechteckförmigen Gewichtsfunktion bzw. einem rechteckförmigen Zeitfenster bewerteten Originalfunktion x(t). Da bei der Zeitfensterung mit Rechteckfenstern die hohen Frequenzbestandteile des ausgeschnittenen Abschnittes sehr stark ansteigen, werden auch andere Zeitfenster verwendet.
Wird der ausgeschnittene Zeitabschnitt periodisch wiederholt, dann können die Entwicklungskoeffizienten für ein orthogonales Aufbaufunktionssystem nach Gl. (2.5) bestimmt werden:

$$a_n = \frac{1}{K_n} \int_T x(t)\, \varphi_n(t)\, dt \,.$$

Ist T nach Bild 7.1 in N gleiche Zeitabschnitte Δt zerlegt worden, dann folgt aus Gl. (2.5)

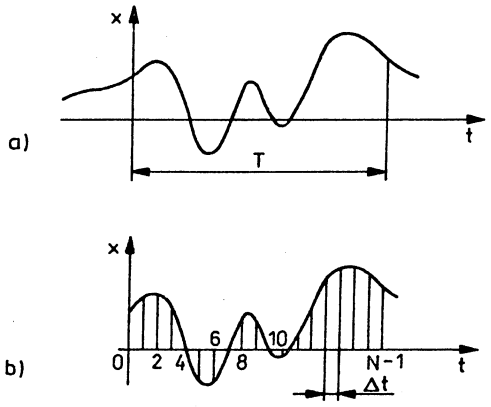


Bild 7.1 Zeitfunktion x(t)
a) Originalfunktion
b) Aufteilung in äquidistante Zeitabschnitte

$$a_n = \frac{\Delta t}{K_n} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\ \varphi_n(k)\ . \qquad (7.1)$$

a_n Entwicklungskoeffizienten nter Ordnung,

$\varphi_n(k)$ diskrete Aufbaufunktion nter Ordnung, Wert im Zeitabschnitt k,

$x(k)$ Abtastwerte der Funktion x(t) im Zeitabschnitt k,

$k = 0, 1, 2, \ldots, N - 1.$

Setzen wir noch

$$F_n = \frac{K_n}{\Delta t}\ a_n\ , \qquad (7.2)$$

dann wird

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\ \varphi_n(k)\ . \qquad (7.3)$$

Für orthonormale Funktionssysteme mit gleichzeitig normierter Zeitbasis, wie z. B. das im Abschnitt 3. beschriebene Mäanderfunktionssystem, ist $\frac{K_n}{\Delta t} = N$ also ebenso groß wie die Zahl der Abtastwerte.

Die Entwicklungskoeffizienten können in folgender Matrizengleichung geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \cdots & \varphi_{0k} & \cdots & \varphi_{0(N-1)} \\ \varphi_{10} & \varphi_{11} & & \varphi_{1k} & \cdots & \varphi_{1(N-1)} \\ \varphi_{20} & \varphi_{21} & & \varphi_{2k} & \cdots & \varphi_{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \varphi_{n0} & \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nk} & \cdots & \varphi_{n(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \varphi_{(N-1)0} & \varphi_{(N-1)1} & \vdots\vdots\vdots & \varphi_{(N-1)k} & \cdots & \varphi_{(N-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

(7.4)

$n = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$ Ordnung der Aufbaufunktion bzw. des Koeffizienten,

$k = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$ Abtaststelle der zu analysierenden Funktion und der Aufbaufunktion.

Gl. (7.4) kann auch in Vektorschreibweise angegeben werden:

$$\{F\} = (\varphi_{nk})\ \{x\}\ . \qquad (7.5)$$

Dabei bedeutet

$$\{F\} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix}$$ einen Spaltenvektor.

Es wurde in Gl. (7.4) die Zahl der Koeffizienten gleich der Zahl der Abtastwerte gesetzt. Damit wird die Matrix der Aufbaufunktionen (φ_{nk}) quadratisch.
Die Numerierung $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, N - 1$ wurde gewählt, um im Koeffizienten mit dem Index 0 das Gleichglied (den arithmetischen Mittelwert) zu erfassen. Aus Symmetriegründen wurden die Abtastwerte, ebenso wie die Koeffizienten, von 0 bis N - 1 numeriert.
Alle orthogonalen Transformationen lassen sich in einer den Gleichungen (7.3) bis (7.5) entsprechenden Form darstellen. Es

sind übliche Darstellungsweisen für diskrete Transformationen. Wird die Zahl der Abtastwerte unter Beachtung des Abtasttheorems festgelegt, dann reicht sie für eine vollständige Beschreibung der zu transformierenden Funktion aus. Für das harmonische Funktionssystem, d. h. für die diskrete Fouriertransformation, ist bereits die Kenntnis von $\frac{N}{2}$ Koeffizienten ausreichend, wie wir im Abschnitt 7.2. sehen werden. Im allgemeinen Fall kann nicht gesagt werden, ob die Anzahl N der Koeffizienten für eine ausreichende Approximation genügt.

7.2. Diskrete Fouriertransformation

Bei einem Vorgehen wie im Abschnitt 7.1. folgen aus den Gleichungen (3.1) und (3.2) die Diskrete Fouriertransformation (DFT),

$$\underline{X}(n) = \mathrm{DFT}\, x(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, \underline{W}^{-nk}, \qquad (7.6)$$

und die inverse DFT,

$$x(k) = \mathrm{DFT}^{-1}\, \underline{X}(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{X}(n)\, \underline{W}^{nk} \qquad (7.7)$$

$$\text{mit } \underline{W} = e^{j\frac{2\pi}{N}},$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots, N-1, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, N-1.$$

(Es sei hier darauf hingewiesen, daß mitunter die Definitionen für DFT abweichend zu den Gleichungen (7.6) und (7.7) gewählt werden. So ist zum Beispiel bei Fritzsche (1985) der Faktor 1/N in der Rücktransformationsgleichung zu finden, also in Gl. (7.7) statt in Gl. (7.6). Im Sinne der physikalischen Interpretation von $\underline{X}(n)$ wird hier der Definition (7.6) der Vorzug gegeben.)

In den Gleichungen (7.6) und (7.7) sind
$x(k)$ die Abtastwerte der Zeitfunktion $x(t)$ im Zeitabschnitt T an der Stelle $k\,\Delta t$,
$\underline{X}(n)$ die Fourierkoeffizienten bei den diskreten Frequenzen $n\,\Delta f = \frac{n}{T}$. Diese Koeffizienten stimmen mit denen der Fourierreihe in Gl. (3.2) überein ($\underline{X}(n) = \underline{X}_n$).

In Vektorschreibweise folgt aus den Gleichungen (7.6) und (7.7)

$$\{\underline{X}(n)\} = \frac{1}{N} (\underline{W}^{-nk}) \{x(k)\}, \tag{7.8}$$

$$\{x(k)\} = (\underline{W}^{nk}) \{\underline{X}(n)\}, \tag{7.9}$$

wobei $\{\underline{X}(n)\}$, $\{x(k)\}$ Spaltenvektoren mit
$n, k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ sind.

Die Matrix der Gewichtsfunktion $\underline{W}^{-nk}$ ist hierbei

$$(\underline{W}^{-nk}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \underline{W}^{-1} & \underline{W}^{-2} & \ldots & \underline{W}^{-(N-1)} \\ 1 & \underline{W}^{-2} & \underline{W}^{-4} & \ldots & \underline{W}^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \underline{W}^{-(N-1)} & \underline{W}^{-2(N-1)} & \ldots & \underline{W}^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}, \tag{7.10}$$

und für die inverse DFT wird

$$(\underline{W}^{nk}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & \underline{W}^{1} & \underline{W}^{2} & \ldots & \underline{W}^{(N-1)} \\ 1 & \underline{W}^{2} & \underline{W}^{4} & \ldots & \underline{W}^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \underline{W}^{(N-1)} & \underline{W}^{2(N-1)} & \ldots & \underline{W}^{(N-1)^2} \end{pmatrix}. \tag{7.11}$$

Im Sinne der Abbildung einer Zeitfunktion nach Abschnitt 2.1. können wir die n. Zeile in der Matrix (7.11) als Abtastwerte der n. Aufbaufunktion auffassen und die entsprechenden Werte in der Matrix (7.10) als die hierzu konjugiert komplexen Werte.

$\underline{W}^{nk}$ ist periodisch in N. Bildet man nun x(k) und $\underline{X}(n)$ für alle ganzzahligen Werte k, n = 0, ±1, ±2, ..., dann werden x(k) und $\underline{X}(n)$ ebenfalls periodisch:

$$x(k) = x(m\,N + k),$$

$$\underline{X}(n) = \underline{X}(m\,N + n)$$

mit $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Es ist weiter

$$\underline{W}^{(N-n)k} = \left[\underline{W}^{nk}\right]^*$$

(denn $\underline{W}^{(N-n)k} = \underline{W}^{Nk}\,\underline{W}^{-nk}$ und $\underline{W}^{-Nk} = 1$).

Im Bild 7.2 ist dieser Zusammenhang für das Beispiel $N = 8$, $k = 1$, $n = 1 \longrightarrow N - 1 = 7$ anschaulich dargestellt.

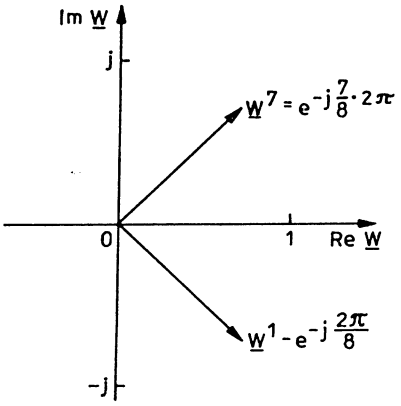


Bild 7.2
Anschauliche Darstellung von $\underline{W}^{(N-n)k} = \left[\underline{W}^{nk}\right]^*$ am Beispiel $N = 8$, $k = 1$, $n = 1 \longrightarrow N - 1 = 7$ in der komplexen Ebene

Somit wird

$$\underline{X}(N - n) = \underline{X}^*(n) = \underline{X}(-n).$$

Da weiterhin $\underline{W}^{-\frac{Nk}{2}}$ zwischen -1 und +1 alterniert, genügen die Koeffizienten $\underline{X}(0)$ bis $\underline{X}(\frac{N}{2})$ zur Beschreibung der Zeitfunktion.
Das ist in Obereinstimmung mit dem Abtasttheorem, wie wir aus der noch folgenden Gl. (7.12) erkennen können (Grenzwert $n_g = \frac{N}{2}$).
In der periodischen Fortsetzung des Spektrums ist $\underline{X}(N - n) = \underline{X}(-n)$, d. h., die Werte bei negativen Frequenzen sind, so wie bei der normalen Fouriertransformation, konjugiert komplex zu denen bei positiven Frequenzen.
Für die DFT gelten einige für die Anwendung wichtige Sätze, die denen der normalen Fouriertransformation entsprechen.

Verschiebung im Zeitbereich um $t_0 = \varkappa\,\Delta t$

$$x(k - \varkappa) \quad \longleftrightarrow \quad \underline{X}(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n\varkappa}$$

Verschiebung im Frequenzbereich $f_0 = \nu\,\Delta f$

$$x(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}k\nu} \quad \longleftrightarrow \quad \underline{X}(n - \nu)$$

Faltung im Zeitbereich

$$x_1(k) * x_2(k) \quad \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} \quad \underline{X}_1(n) \cdot \underline{X}_2(n)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\varkappa=0}^{N-1} x_1(\varkappa)\, x_2(k - \varkappa)$$

Faltung im Frequenzbereich

$$x_1(k) \cdot x_2(k) \quad \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} \quad \underline{X}_1(n) * \underline{X}_2(n)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N-1} \underline{X}_1(\nu)\, \underline{X}_2(n - \nu)$$

Für die normale Fouriertransformation nach den Gleichungen (3.16) und (3.17) ergibt sich zu Gl. (7.6) der Zusammenhang

$\underline{X}(\omega) = \text{FT}\, x(t) = T\, \underline{X}(n)$ an der Stelle $\omega = n\, \Delta f = \frac{n}{T}$,

$x(t) = \text{FT}^{-1}\, \underline{X}(\omega) = x(k)$ an der Stelle $t = k\, \Delta t = k\, \frac{T}{N}$.

$\underline{X}(n) = \text{DFT}\, x(k)$ entspricht also der auf die Dauer der Abtastung T bezogenen Amplitudendichte $\underline{X}(\omega) = \text{FT}\, x(t)$.
Im Bild 7.3 sind die Zusammenhänge zwischen den Fouriertransformationen schematisch dargestellt.

Die Zahl N der Zeitabschnitte Δt ist so groß zu wählen bzw. der Zeitabschnitt Δt ist so klein zu wählen, daß das Abtasttheorem nach Abschnitt 6. erfüllt wird:

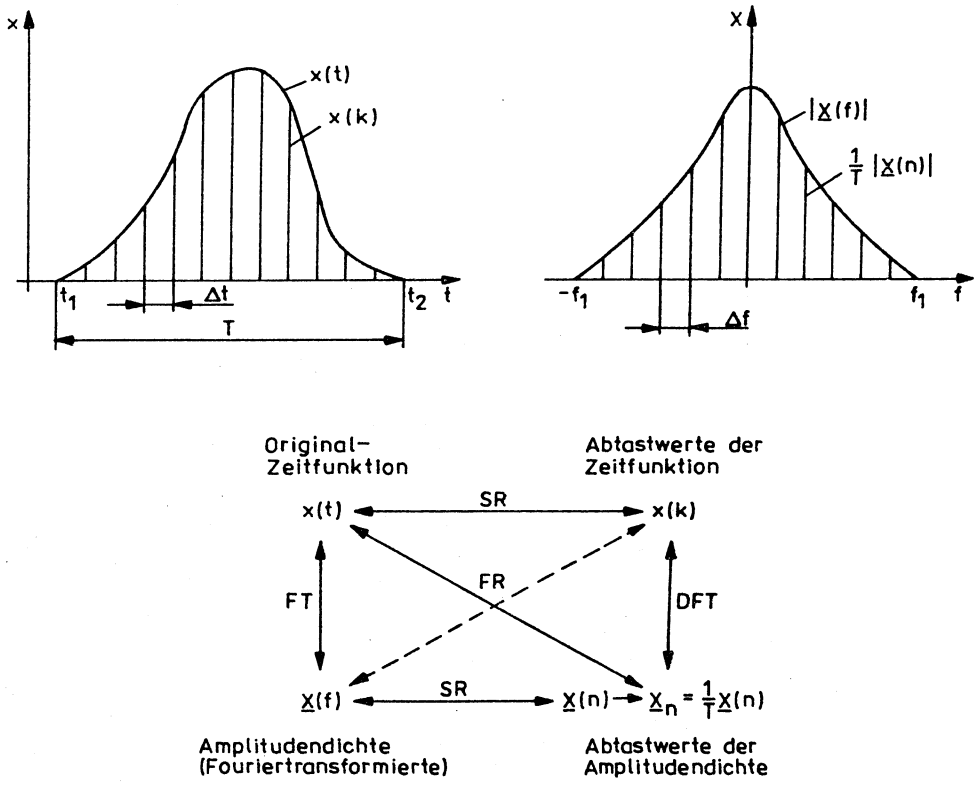
$$f_A = \frac{1}{\Delta t} > 2\, f_g$$

mit f_A Abtastfrequenz, f_g Grenzfrequenz.

Hieraus folgt für die Zahl der Abtastwerte

$$\boxed{N = \frac{T}{\Delta t} > 2\, n_g,} \qquad (7.12)$$

wobei $n_g = \frac{f_g}{\Delta f} = f_g\, T$ ist.



Abtastbedingung $\boxed{N\,\Delta t\,\Delta f = 1}$

mit $\Delta f = \frac{1}{T}$, $\Delta t = \frac{1}{2 f_1}$, $N = \frac{T}{\Delta t} = \frac{2 f_1}{\Delta f}$.

Bild 7.3 Zusammenhang zwischen den Fouriertransformationen

- FT Fouriertransformation (Gln. (3.16) und (3.17))
- FR Fourierreihe (Gln. (3.1) und (3.2))
- DFT Diskrete Fouriertransformation (Gln. (7.6) und (7.7))
- SR Sampling-Reihe (Gl. (6.1) bzw. (6.7))

(Die Transformation x(k) ⇒ FR X(f) ist nicht ohne weiteres mit den Gleichungen (3.1) und (3.2) möglich. Hierzu ist eine geeignete Umformung erforderlich.)

7.3. Schnelle Transformationen

7.3.1. Allgemeines

Die schnellen Transformationen sind Algorithmen zur Berechnung der diskreten Transformationen mit verringertem Rechenaufwand. Die Matrizengleichung (7.4) ist in hohem Grade redundant. Die Redundanz ist auf die Orthogonalität, die gleichartige Struktur und die Periodizität der Aufbaufunktionen im jeweiligen Funktionssystem zurückzuführen. Es haben deshalb sehr viele Elemente in der Matrix der Aufbaufunktionen (φ_{nk}) in Gl. (7.4) den gleichen Wert. Durch die Anwendung geeigneter Rechenschemata läßt sich die Redundanz verringern.

Alle Verfahren zur Redundanzverringerung gehen von einer definierten Zahl N von Abtastwerten aus. Es wird

$$N = a^p , \qquad a, p \text{ ganzzahlig} ,$$

gesetzt. Für praktische Berechnungen wird in der Regel a = 2 gewählt. Es wird somit

$$N = 2^p , \qquad p \text{ ganzzahlig} . \tag{7.13}$$

p ist so festzulegen, daß N mindestens so groß wird, daß das Abtasttheorem erfüllt wird.

Die Verringerung des Berechnungsaufwandes erfolgt durch geeignete Umformung und Aufspaltung der Transformationsmatrix (φ_{nk}) in Gl. (7.4). Die umgeformte Matrix (φ^*_{nk}) wird in Untermatrizen aufgespalten, bei denen möglichst viele Elemente verschwinden:

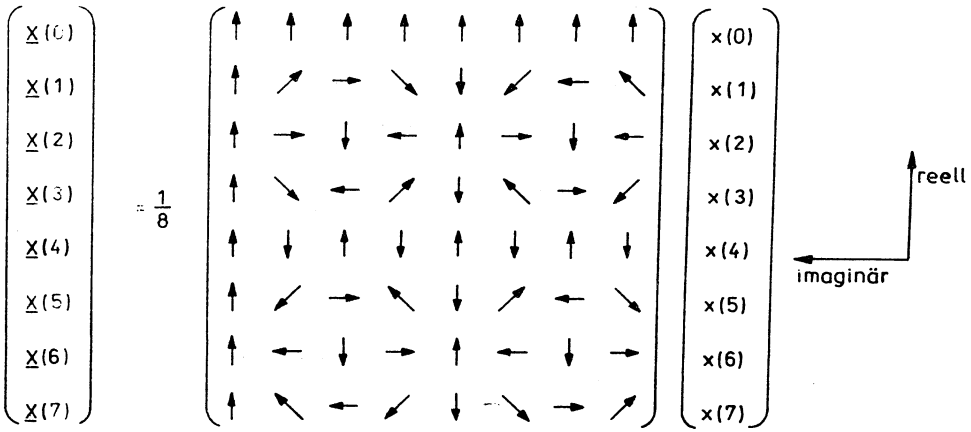
$$(\varphi^*_{nk}) = (A)\ (B)\ (C)\ \ldots \tag{7.14}$$

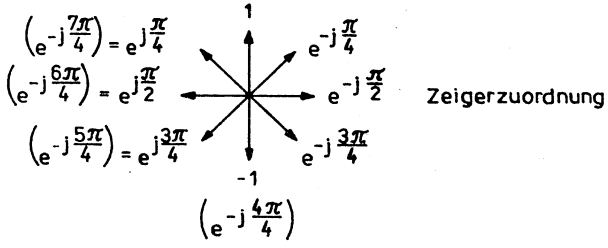
Für das Aufspalten von (φ^*_{nk}) in Untermatrizen gibt es für jedes Aufbaufunktionssystem spezielle Regeln.

7.3.2. Schnelle Fouriertransformation (Fast Fourier Transform - FFT)

Die Grundlage der FFT ist die Diskrete Fouriertransformation (DFT). Die FFT ist lediglich ein Rechenoperationen und Rechenzeit einsparender Algorithmus. Das Ergebnis einer FFT ist bei gleicher analysierter Zeitfunktion und gleichen Abtastwerten identisch mit dem der DFT.

Die Ausführung der DFT nach Gl. (7.6) bzw. (7.8) erfordert N^2 Multiplikationen und N (N - 1) Additionen, wenn man davon absieht, daß nur $\frac{N}{2}$ Fourierkoeffizienten voneinander unabhängig sind. Dabei sind die mit komplexen Größen auszuführenden Multiplikationen besonders rechenzeitaufwendig. In der Matrix der Gewichtsfunktion ($\underline{W}^{-nk}$), die N^2 Elemente enthält, sind jedoch nur N Elemente voneinander verschieden, wie man sich leicht an dem Beispiel des Bildes 7.4 überzeugen kann. Es werden deshalb





$$\{\underline{X}(n)\} = \frac{1}{N}\,(\underline{W}^{-nk})\,\{x(k)\} \qquad \text{mit } \underline{W} = e^{j\frac{2\pi}{N}} \qquad \text{für } N = 8.$$

Bild 7.4 Matrizengleichung zur FFT für N = 8 mit symbolischer Darstellung der komplexen Einheitsvektoren $e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$ durch Zeiger
Die Zeigerzuordnung ist im unteren Teil des Bildes festgelegt.

zahlreiche Rechenoperationen bei der Durchführung der DFT wiederholt, oder es bestehen Abhängigkeiten zwischen den Operationen, die durch geeignete Algorithmen zur Verminderung des Rechenaufwandes ausgenutzt werden können.

Die Verminderung des Rechenaufwandes durch FFT kann sowohl durch Programmimplementierung als auch durch Schaltungsimplementierung erfolgen. Schaltungsimplementierung, in speziellen Meßgeräten für die Frequenzanalyse oder auch als spezieller Modul in Rechenanlagen für allgemeinere Verwendung ausgeführt, erlaubt die Durchführung einer Analyse von zum Beispiel $N = 1024 (= 2^{10})$ Abtastwerten in wenigen Millisekunden. Damit wird für viele Anwendungsfälle eine sog. Echtzeitanalyse möglich. Fortlaufende Zeitsignale werden zeitsegmentiert. Während für jeweils ein Segment N Abtastwerte entnommen und zwischengespeichert werden, wird für das vorangegangene Segment die FFT durchgeführt. Die Dauer einer Echtzeitanalyse ist kürzer oder höchstens gleich groß wie die Dauer eines Zeitsegmentes.

Die FFT erfolgt auf der Grundlage von Matrix-Faktorisierungen oder mit Hilfe von geeigneten Signalflußplänen. Hierbei wird von $N = 2^p$ (p ganzzahlig) Abtastwerten ausgegangen.

Die Matrix-Faktorisierung wird am Beispiel der Bilder 7.4 und 7.5 für $N = 8$ erläutert (Thrane (1979)).

Im Bild 7.4 ist die Matrizengleichung (7.8) für $N = 8$ mit Hilfe von anschaulichen Symbolen für die komplexen Einheitsvektoren in der Matrix der Aufbaufunktionen dargestellt.

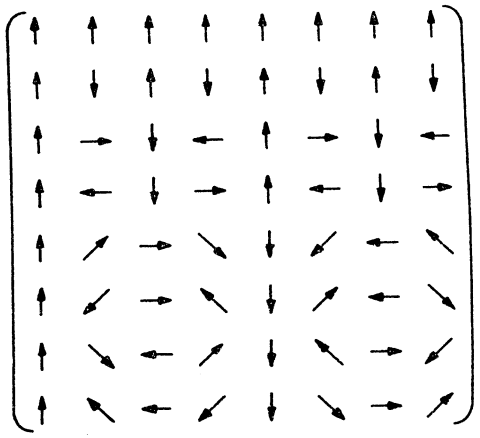
Es kann nun eine Umordnung der Zeilen der Matrix (decimation in frequency) ($\underline{W}^{-nk}$) auf der Basis einer "Bitumkehr" der Zeilenordnung erfolgen.

Wir wollen unter Bitumkehr die Umkehr der Reihenfolge der Stellen einer Dualzahl verstehen. Zum Beispiel für die vierstellige Dualzahl 0100 wird: $0100 \xleftarrow{BU} 0010$.

Werden mit n die Elemente der aufsteigenden Zahlenfolge von 0 bis N - 1 bezeichnet, dann entsteht durch Bitumkehr die Zahlenfolge u. Für $N = 8$ wird somit

n	0	1	2	3	4	5	6	7
(dual)	000	001	010	011	100	101	110	111
Bitum-kehr	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
(dual)	000	100	010	110	001	101	011	111
u	0	4	2	6	1	5	3	7

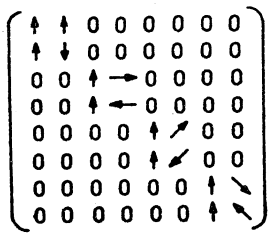
$(\underline{W}^{-uk}) =$



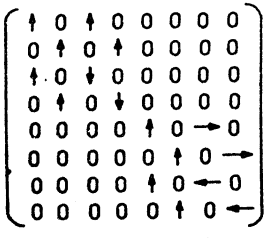
Zeilenzuordnung in Matrix:

$(\underline{W}^{-uk})$	$(\underline{W}^{-nk})$
(0) 0 0 0	(0) 0 0 0
(1) 0 0 1	(4) 1 0 0
(2) 0 1 0	(2) 0 1 0
(3) 0 1 1	(6) 1 1 0
(4) 1 0 0	(1) 0 0 1
(5) 1 0 1	(5) 1 0 1
(6) 1 1 0	(3) 0 1 1
(7) 1 1 1	(7) 1 1 1

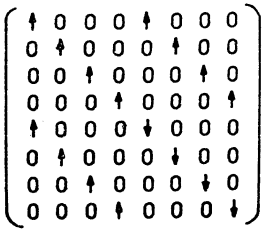
(A)



(B)



(C)



$$(\underline{W}^{-uk}) = (A)(B)(C)$$

$$\{X(u)\} = \frac{1}{N}(A)(B)(C)\{x(k)\} \qquad \text{für } N=8.$$

Bild 7.5 **Matrix-Faktorisierung nach dem Prinzip "decimation in frequency" für N = 8**

u ist die Zahlenfolge, die durch Bitumkehr der Zahlenfolge k = 0, 1, 2, ..., N - 1 entsteht.

Werden nun die Zeilen in aufsteigender Folge von u geordnet, entsteht die Matrix $(\underline{W}^{-uk})$. In der Matrizengleichung (7.8) sind nun auch die Fourierkoeffizienten zu vertauschen. Es wird somit

$$\{\underline{X}(u)\} = \frac{1}{N} (\underline{W}^{-uk}) \{x(k)\} .$$

Die Matrix $(\underline{W}^{-uk})$ läßt sich nun in ld N Teilmatrizen aufspalten (faktorisieren), im Beispiel nach Bild 7.5 in ld 8 = 3 Matrizen. Die Teilmatrizen haben allgemein die Eigenschaft, daß sie in jeder Zeile nur zwei Elemente enthalten, die von Null verschieden sind. Die Ausmultiplikation der Matrizengleichung erfordert somit nur 2 N ld N Multiplikationen. Die Matrizen (A), (B) und (C) haben nach Bild 7.5 weiterhin die Eigenschaft, daß sich jeweils immer zwei Zeilen nur durch ein umgekehrtes Vorzeichen eines ihrer Elemente unterscheiden, z. B. 0 und 1, 2 und 3, ... in (A); 0 und 2, 1 und 3, ... in (B); 0 und 4, 1 und 5, ... in (C). Damit braucht jeweils für zwei Zeilen nur eine Multiplikation ausgeführt zu werden, und es wird nur zwischen Addition und Subtraktion unterschieden. Auch damit wird noch einmal die Rechenzeit auf die Hälfte reduziert. Ein weiterer Rechenzeitgewinn kann für die üblicherweise reellen Zeitfunktionen dadurch erhalten werden, daß nur $\frac{N}{2}$ Koeffizienten berechnet werden.

Die Symmetrie der Matrix $(\underline{W}^{-nk})$, die im Bild 7.4 leicht zu erkennen ist, läßt die Faktorisierung nicht nur auf der Basis einer Zeilen-, also Frequenzumordnung zu, sondern auch auf der Basis einer Spalten-, also Zeitumordnung. Man spricht dann von "decimation in time".

Ein anderes Darstellungsmittel für die FFT sind Graphen oder Signalflußdiagramme. In den für die FFT-Darstellung verwendeten Graphen in den Bildern 7.6 und 7.7 bedeutet jeweils ein Pfeil eine Multiplikation eines im allgemeinen komplexen Wertes am vorangegangenen Knoten mit dem Einheitsvektor $e^{-j \frac{2\pi}{N} \varepsilon}$ mit der dem Pfeil eingeschriebenen Potenz ε. Ist dem Pfeil keine Potenz eingeschrieben, dann entspricht das $\varepsilon = 0$, also Multiplikation mit 1. Es entsteht dann am folgenden Knoten ein wiederum komplexer Zwischenwert oder der Ausgangswert.

Auch hier sind wieder die zwei Methoden der Zeit- oder Frequenzumordnung zu unterscheiden.

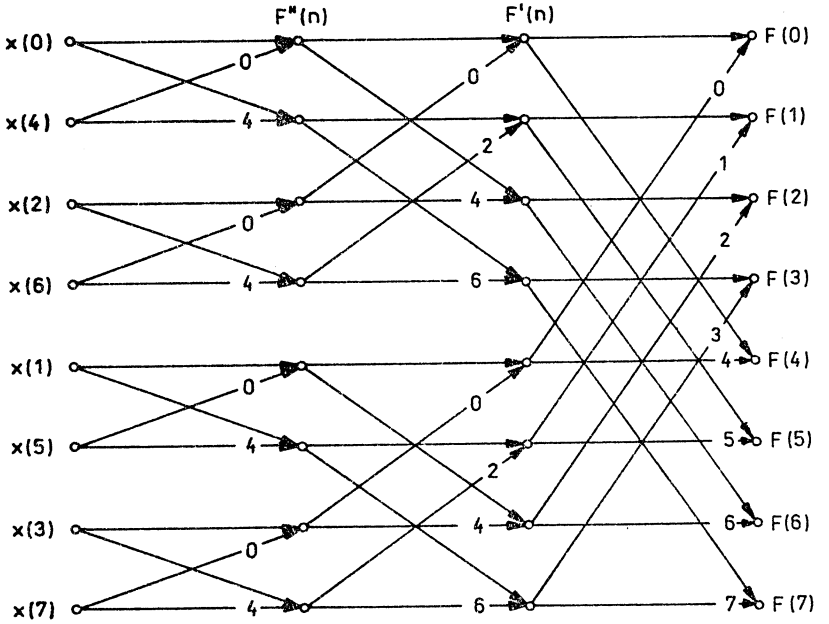


Bild 7.6 FFT-Zerlegung (decimation in time) für N = 8

Jeder Pfeil des Graphen ohne Kennzeichnung hat den Wert 1. Die durch die Zahlenwerte ε gekennzeichneten Pfeile haben den Wert $\underline{W}^{*\varepsilon} = e^{-j\frac{\pi}{4}\varepsilon}$. Zuordnung zu den Fourierkoeffizienten:

$$\underline{X}(n) = \frac{1}{N} F(n)$$

Bei der Zeitumordnung (decimation in time), wie sie für N = 8 im Bild 7.6 dargestellt ist, sind die Eingangsgrößen x(0) bis x(7) in einer Reihenfolge geordnet, die sich durch Bitumkehr ergibt. Je zwei der Eingangsgrößen sind durch einen "FFT-Butterfly" miteinander verknüpft. Die Zwischenwerte F'(n) werden erneut durch FFT-Butterfly verknüpft. Die allgemeine Exponentenanordnung ist aus Bild 7.6 leicht zu erkennen und für N > 8 fortzusetzen.

Überprüfen Sie die Richtigkeit des Signalflußdiagramms an einigen Beispielen! Gehen Sie hierbei von den Wichtungen der Abtastwerte x(k) für die Koeffizienten $\underline{X}(n)$ nach Bild 7.4 aus!

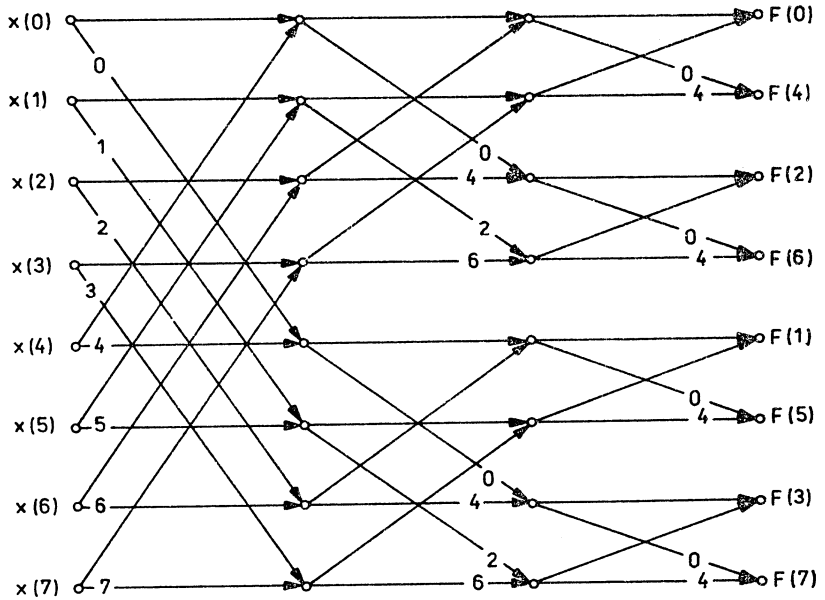


Bild 7.7 FFT-Zerlegung (decimation in frequency) für N = 8
Jeder Pfeil des Graphen ohne Kennzeichnung hat den Wert 1. Die durch die Zahlenwerte ε gekennzeichneten Pfeile haben den Wert $W^{*\varepsilon} = e^{-J\frac{\pi}{4}\varepsilon}$. Zuordnung zu den Fourierkoeffizienten:

$\underline{X}(n) = \frac{1}{N} F(n)$.

Bei der Frequenzumordnung (decimation in frequency) nach Bild 7.7 erhält man ausgangsseitig eine Frequenzzuordnung, die der Zeilenzuordnung im Bild 7.5 entspricht. Aus der Symmetrie der Matrix der Gewichtsfunktionen im Bild 7.4 folgt der spiegelbildliche Aufbau der Anordnung im Bild 7.7 zu dem im Bild 7.6.

Für die Abschätzung der Rechenzeiteinsparung durch FFT gegenüber DFT wollen wir nur die Verringerung des Multiplikationsaufwandes betrachten. Der Mehraufwand von DFT gegenüber FFT ergibt sich aus dem Verhältnis

$$\frac{N^2}{N \operatorname{ld} N} = \frac{N}{\operatorname{ld} N} .$$

Für $N = 1024 \; (= 2^{10})$ wird $\frac{N}{\operatorname{ld} N} \approx 100$.

Bei Programmimplementierung der FFT mit höheren Programmiersprachen und Verwendung von Interpretern tritt mitunter erst bei relativ hohem N ($N > 2^8$) ein Rechenzeitgewinn gegenüber normaler DFT auf. Das ist im größeren Programm- bzw. Sortieraufwand bei FFT gegenüber DFT begründet.
Obwohl hier im Lehrbrief die Abtastwerte der Zeitfunktion wie reelle Werte gekennzeichnet wurden, können sie im allgemeinen auch komplex sein, und es gelten auch dann die hier angegebenen Zusammenhänge uneingeschränkt. Für die Transformation von reellen Zeitfunktionen können andererseits noch weitere rechenzeitsparende Algorithmen verwendet werden. Hierzu gibt es Hinweise bei Giloi (1974) (dort sind auch theoretische Begründungen für den Aufbau der Signalflußdiagramme angegeben).

7.3.3. Schnelle Hadamard-Transformation

Das im Abschnitt 4. beschriebene Mäanderfunktionssystem kann durch Vertauschen der Reihenfolge der Aufbaufunktionen in ein als Hadamard-System bezeichnetes Funktionssystem umgeordnet werden (Andrews (1970)). Für $N = 2^3 = 8$ Abtastwerte und Koeffizienten erhält man für das originale System mit einer Ordnung der Aufbaufunktionen nach Bild 4.1

$$\{F(n)\} = (\varphi(n\ k))\ \{x(k)\}\ .$$

Mit der zur Faktorisierung in den Zeilen umgeordneten Matrix der Aufbaufunktionen wird

$$\{F^*(n'\ k)\} = (\varphi^*(n'\ k))\ \{x(k)\}\ .$$

Die Zuordnung der Indizes n' zu n, jeweils in aufsteigender Folge, ist im Bild 7.8 angegeben.

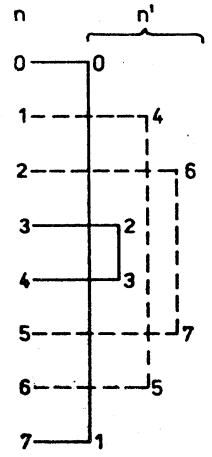


Bild 7.8 Schema für die Umordnung der Matrizengleichung

$\{F(n)\} = (\varphi(n\ k))\ \{x(k)\}$

in

$\{F^*(n')\} = (\varphi^*(n'\ k))\ \{x(k)\}$

Gestrichelte Linien bedeuten Vorzeichenumkehr der Matrixelemente

$$\begin{pmatrix} F_0^* \\ F_1^* \\ F_2^* \\ F_3^* \\ F_4^* \\ F_5^* \\ F_6^* \\ F_7^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $(\varphi^*(n'\ k))$ läßt sich aufspalten in drei gleiche Teilmatrizen $(\varphi^*(n'\ k)) = (A)^3$ mit

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Somit wird

$$\{F^*(n'\ k)\} = (A)^3\ \{x(k)\} .$$

Für Matrizen mit allgemein $N = 2^M$ Elementen erfolgt eine Aufspaltung in M Teilmatrizen, in denen wiederum jede Zeile nur mit zwei von Null verschiedenen Elementen besetzt ist.
Auch hier verringert sich der Rechenaufwand durch die Faktorisierung etwa um den Faktor $\frac{N}{ld\ N}$. Gegenüber der Fouriertransformation wird der Rechenaufwand aber dadurch wesentlich geringer, daß bei der Berechnung der Koeffizienten nur Additionen und Subtraktionen auszuführen sind.
Durch das umfangreiche Programmangebot und auch Hardware-Implementierungen für FFT ist die Analyse mit Rechteckfunktionen in

den letzten Jahren von der Fourieranalyse häufig verdrängt worden. Das scheint im Sinne einer optimalen Erkennungsstrategie nicht in jedem Anwendungsfall günstig zu sein.

7.4. Z-Transformation und Digitalfilter

Mit der zunehmenden Signalverarbeitung in digitaler Technik besteht vielseitiges Interesse, auch die Frequenzfilterung in digitaler Technik vorzunehmen. Die Z-Transformation ist ein geeignetes Mittel für das Verständnis und die Konzipierung von Digitalfiltern. Lit.: Giloi (1974); Rabiner, Gold (1975); Kreß (1977); Unbehauen (1980); Fritzsche (1985).
Für eine Folge von diskreten Zahlenwerten $\{x(k)\}$, $k = -\infty$ bis $+\infty$, wird als Z-Transformation (ZT) definiert:

$$\underline{X}(z) = \mathrm{ZT}\ x(k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)\ z^{-k} \qquad (7.15)$$

mit der komplexen Variablen z. Für kausale Zeitfunktionen mit den diskreten Zahlenwerten $\{x(k)\}$, $k = 0$ bis ∞, folgt hieraus die einseitige Z-Transformation

$$\underline{X}(z) = \mathrm{ZT}\ x(k) = \sum_{0}^{\infty} x(k)\ z^{-k}\,. \qquad (7.16)$$

(In der Literatur wird häufig Gl. (7.15) als Laurent-Transformation bezeichnet und Gl. (7.16) als Z-Transformation, z. B. Wunsch (1969)). Ist x(k) die Folge von Abtastwerten einer kausalen Zeitfunktion, die im Abstand Δt aufeinander folgen, dann besteht mit $z = e^{pt}$, $p = j\omega + \delta$ bzw. mit $z = e^{j\omega t}$ enge Verwandtschaft zur Laplace- bzw. zur Fouriertransformation.
Aus der Schreibweise

$$\underline{X}(z) = x(0) + x(1)\ z^{-1} + x(2)\ z^{-2} + x(3)\ z^{-3} + \ldots \qquad (7.17)$$

kann mit $z = e^{j\omega\Delta t}$ der Operator z^{-k} so gedeutet werden, daß er den jeweiligen Abtastwert x(k) um k Takte Δt auf der Zeitachse nach rechts verschiebt.

Inverse Z-T

$$x(k) = ZT^{-1}\,\underline{X}(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint \underline{X}(z)\, z^{k-1}\, dz \,. \qquad (7.18)$$

Die diskreten Zahlenwerte x(k) können nach Gl. (7.18) aus der Z-Transformierten $\underline{X}(z)$ mit Hilfe des Residuensatzes (siehe Anhang 3, Lehrbrief 3) berechnet werden, oder, häufig viel einfacher, indem $\underline{X}(z)$ durch Ausmultiplizieren und Ausdividieren in eine Reihendarstellung nach Gl. (7.17) gebracht wird, womit sich die Zahlenwerte (z. B. Abtastwerte einer Zeitfunktion) unmittelbar ergeben.

Einige Beispiele für ZT

1. Digitaler Impuls

   x(k) = 1 für k = 0,
   x(k) = 0 sonst,

   $\underline{X}(z) = 1$.

2. Digitaler Sprung

   x(k) = 1 für k ≧ 0,
   x(k) = 0 sonst,

   $$\underline{X}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \,.$$

3. Komplexe Exponentialfunktion

   x(k) = $e^{jk\varphi}$ für k ≧ 0,
   x(k) = 0 sonst,

   $$\underline{X}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{jk\varphi}\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1}\, e^{j\varphi})^k = \frac{1}{1 - z^{-1}\, e^{j\varphi}} \,.$$

4. Potenzfunktion

   x(k) = a^k für k ≧ 0,
   x(k) = 0 sonst,

   $$\underline{X}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a\, z^{-1})^k = \frac{1}{1 - a\, z^{-1}} \,.$$

Einige Eigenschaften der ZT

1. Linearität

Ist $x_1(k)$ eine Folge von Zahlenwerten (z. B. eine Folge von Abtastwerten einer Zeitfunktion $x(t)$) und $x_2(k)$ eine andere Folge, dann wird mit

$$\underline{X}_1(z) = ZT\ x_1(k) \quad \text{und} \quad \underline{X}_2(z) = ZT\ x_2(k)$$

$$\boxed{ZT\ \{a\ x_1(k) + b\ x_2(k)\} = a\ \underline{X}_1(z) + b\ \underline{X}_2(z)\ .} \qquad (7.19)$$

2. Verschiebung

Ist $\underline{X}(z) = ZT\ x(k)$, dann gilt

$$\boxed{ZT\ x(k - k_0) = \underline{X}(z)\ z^{-k_0}\ .} \qquad (7.20)$$

Das heißt, werden alle Abtastwerte $x(k)$ einer Zeitfunktion $x(t)$ auf der Zeitachse um k_0 Abtasteinheiten Δt nach rechts verschoben, dann ergibt sich die Z-Transformierte der verschobenen Zeitfunktion durch Multiplikation von $ZT\ x(k)$ mit z^{-k_0}. Ist $z = e^{j\omega\Delta t}$, dann entspricht diese Verschiebung Gl. (3.19).

3. Faltung

Mit $\underline{Y}(z) = ZT\ y(k)$; $\underline{X}(z) = ZT\ x(k)$; $\underline{H}(z) = ZT\ h(k)$ folgt

$$\boxed{y(k) = x(k) * h(k) \overset{ZT}{\longleftrightarrow} \underline{Y}(z) = \underline{X}(z) \cdot \underline{H}(z)\ .}$$

Wie bei der Fouriertransformation entsprechen Faltungen im Zeitbereich Multiplikationen im Bildbereich (siehe Abschnitt 7.2.).

Methode zur Filterberechnung

Analoge Filter können durch ihre Obertragungsfunktion in der Pol-Nullstellen-Darstellung

$$G(p) = K\,\frac{(p - p_1)\ (p - p_2)\ (p - p_3)\ \ldots}{(p - p_1')\ (p - p_2')\ (p - p_3')\ \ldots}$$

oder in der Polynomdarstellung

$$G(p) = \frac{A_0 + A_1\,p + A_2\,p^2 + A_3\,p^3 + \ldots}{B_0 + B_1\,p + B_2\,p^2 + B_3\,p^3 + \ldots}$$

beschrieben werden.

Aus $z = e^{p\Delta t}$ folgt

$$p = \frac{1}{\Delta t} \ln z \,.$$

Reihenentwicklung ln z führt zu

$$p = \frac{2}{\Delta t}\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right] .$$

Mit der Näherung

$$\boxed{p = \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{z-1}{z+1}} \qquad (7.21)$$

erhält man eine sehr gute Näherung für die Übertragungsfunktion H(z) aus G(p).

Aus G(p) erhält man mit Gl. (7.21)

$$\underline{H}(z) = \frac{a_0 + a_1\,z^{-1} + a_2\,z^{-2} + a_3\,z^{-3} + \ldots}{b_0 + b_1\,z^{-1} + b_2\,z^{-2} + b_3\,z^{-3} + \ldots} \,. \qquad (7.22)$$

Bildet man die Z-Transformierte einer Eingangsfunktion eines linearen Zweitores aus ihren Abtastwerten und multipliziert sie mit der Übertragungsfunktion des Zweitores H(z), dann erhält man die Z-Transformierte der Ausgangsfunktion. Durch arithmetische Umformung kann man sie auf eine Reihendarstellung bringen und erhält damit sofort die Abtastwerte der Ausgangsfunktion.

Beispiel

Ein rechteckförmiger Spannungsstoß mit dem Zeitverlauf und der Abtastung nach Bild 7.9 wird auf den Eingang eines RC-Hochpasses gegeben.

Die Z-Transformierte der Eingangsfunktion wird für $\Delta t = \frac{T}{4}$ mit $z = e^{j\omega\Delta t}$:

$$\underline{U}_e(z) = \hat{u}\left[1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + 0 + 0 + \ldots\right] .$$

Stellen wir uns den Rechteckimpuls aus einer Sprungfunktion bei t = 0 und einer entgegengesetzten Sprungfunktion bei t = T zusammengesetzt vor, dann wird nach der Abtastung entsprechend Bild 7.9b

$$\underline{U}_e(z) = \hat{u}\left[1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots\right] - \hat{u}\, z^{-5}\left[1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots\right],$$

$$\underline{U}_a(z) = \hat{u}\left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{z^{-5}}{1 - z^{-1}}\right] = \frac{\hat{u}}{1 - z^{-1}}\left[1 - z^{-5}\right].$$

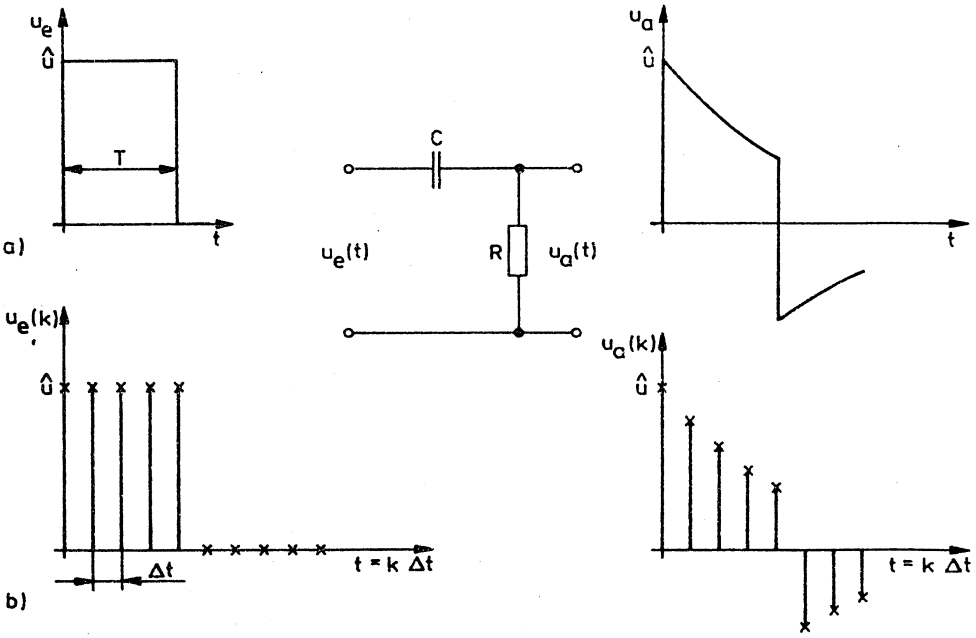


Bild 7.9 Rechteckförmiger Spannungsverlauf am Eingang eines RC-Hochpasses

a) Spannungsverlauf an Ein- und Ausgang

b) Abtastwerte an Ein- und Ausgang

Die Übertragungsfunktion des Hochpasses ist

$$G(p) = \frac{R}{R + \frac{1}{p\,C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{p\,\tau}} \quad \text{mit} \quad \tau = R\,C\,.$$

Mit Gl. (7.21) wird

$$\underline{H}(z) = \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot \frac{z-1}{z-\alpha} \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \frac{\Delta t}{2\tau} ; \quad \alpha = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} .$$

Die Z-Transformierte der Ausgangsfunktion $x_a(k)$ wird dann

$$\underline{U}_a(z) = \underline{U}_e(z)\, \underline{H}(z) = \frac{\hat{u}}{1+\varepsilon} \cdot \frac{z-1}{z-\alpha} \cdot \frac{z}{z-1} \left[1 - z^{-5}\right]$$

$$= \frac{\hat{u}}{1+\varepsilon} \left[1 + \alpha\, z^{-1} + \alpha^2\, z^{-2} + \alpha^3\, z^{-3} + \alpha^4\, z^{-4} \right.$$

$$\left. + (\alpha^5 - 1)\, (z^{-5} + \alpha\, z^{-6} + \alpha^2\, z^{-7} + \ldots)\right] .$$

Die Abtastwerte sind unmittelbar $U_a(z)$ zu entnehmen:

$$u_a(k) = \frac{\hat{u}}{1+\varepsilon} \left\{1;\ \alpha;\ \alpha^2;\ \alpha^3;\ \alpha^4;\ \alpha^5 - 1;\ \alpha\,(\alpha^5 - 1);\ \ldots\right\} .$$

Im Bild 7.9 sind die Abtastwerte $u_a(k)$ rechts unten dargestellt. Sie stimmen überein mit den entsprechenden Werten der kontinuierlichen Funktion $u_a(t)$. Es ist also $u_a(k) = u_a(t = k\,\Delta t)$. Für eine gute Approximation müßte $\Delta t \ll T$ gewählt werden.

Strukturen der Digitalfilter

Digitalfilter können in sehr unterschiedlicher Weise realisiert werden. Dabei werden rekursive und nichtrekursive Filter unterschieden.

Bei einem linearen Zweitor seien die Eingangsfunktionswerte $\{x(k)\}$ und die Ausgangsfunktionswerte $\{y(k)\}$.

Bei einem rekursiven Filter ist

$$y(k) = F[y(k-1),\ y(k-2),\ \ldots,\ x(k),\ x(k-1),\ \ldots] ,$$

d. h., die Ausgangsfunktion hängt sowohl von vergangenen Abtastwerten der Ausgangsfunktion als auch von vergangenen und gegenwärtigen Abtastwerten der Eingangsfunktion ab.

Bei nichtrekursiven Filtern ist

$$y(k) = F[x(k),\ x(k-1),\ x(k-2),\ \ldots] ,$$

d. h., die Ausgangsfunktion hängt nur von den Eingangswerten ab.

Ist $\underline{X}(z) = ZT\ x(k)$, $\underline{Y}(z) = ZT\ y(k)$ und ist

$$\underline{H}(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i\, z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} b_i\, z^{-i}} = \frac{\underline{Y}(z)}{\underline{X}(z)} , \qquad (7.23)$$

dann folgt aus

$$\underline{Y}(z) \sum_{i=0}^{N} b_i \, z^{-i} = \underline{X}(z) \sum_{i=0}^{N} a_i \, z^{-i} \quad ,$$

$$\sum_{i=0}^{N} b_i \, z^{-i} \, \underline{Y}(z) = \sum_{i=0}^{N} a_i \, z^{-i} \, \underline{X}(z) \quad . \tag{7.24}$$

Nach dem Verschiebungssatz Gl. (7.20) ist $z^{-i} \, \underline{Y}(z) = ZT \; y(k - i)$. Damit folgt aus Gl. (7.24) nach Rücktransformation

$$\sum_{i=0}^{N} b_i \, y(k - i) = \sum_{i=0}^{N} a_i \, x(k - i) \quad .$$

Mit $b_0 = 1$ ergibt sich die für ein rekursives Filter charakteristische Gleichung

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N} a_i \, x(k - i) - \sum_{i=1}^{N} b_i \, y(k - i) \quad . \tag{7.25}$$

Bild 7.10 zeigt eine einfache Struktur zur Realisierung der Differenzengleichung (7.25).

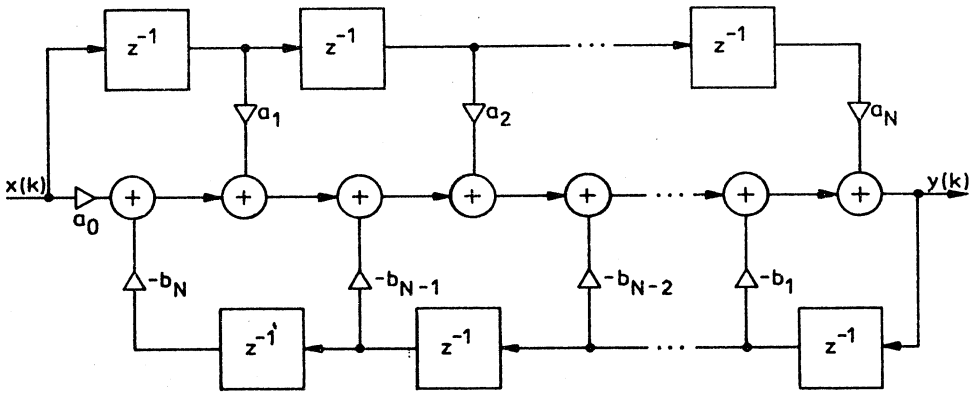


Bild 7.10 Digitales Filter - direkte Form (rekursiv)

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N} a_i \, x(k - i) - \sum_{i=1}^{N} b_i \, y(k - i)$$

Stellen wir uns $\underline{H}(z)$ nach Gl. (7.22) in zwei Teilfilter aufgeteilt vor,

$$\underline{H}(z) = \underline{H}_1(z)\,\underline{H}_2(z)$$

mit

$$\underline{H}_1(z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} b_i\, z^{-i}} \quad \text{und} \quad \underline{H}_2(z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} a_i\, z^{-i}},$$

dann enthält $\underline{H}_1(z)$ nur Pole und $\underline{H}_2(z)$ nur Nullstellen. $\underline{H}_1(z)$ kann für $b_0 = 1$ mit einer Schaltungsstruktur nach Bild 7.11 realisiert werden, wenn dort $a_0 = 1$ und a_1 bis a_N gleich Null gesetzt werden. Entsprechend wird $\underline{H}_2(z)$ ebenfalls nach einer Struktur nach Bild 7.11 realisiert, wenn dort b_1 bis b_N gleich Null gesetzt werden.

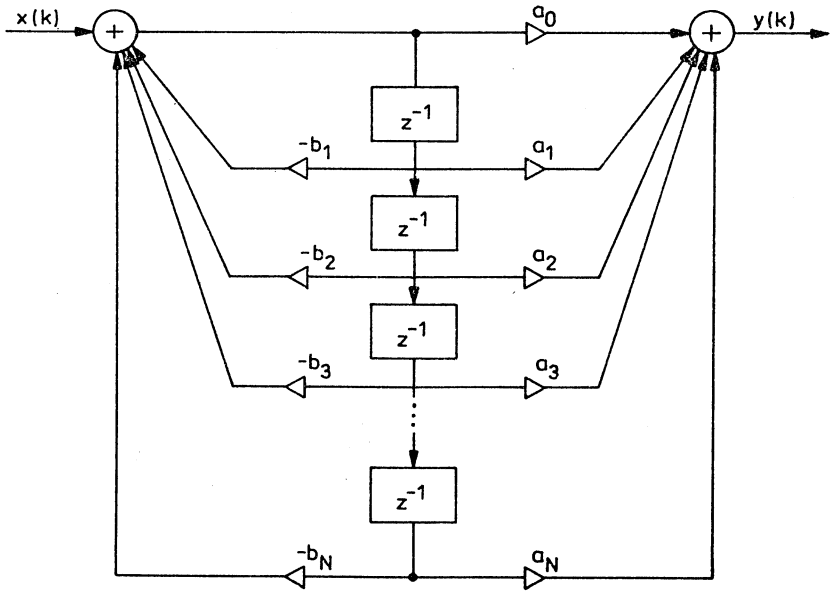


Bild 7.11 Digitales Filter - kanonische Form (nichtrekursiv)

$$\underline{H}(z) = \frac{\underline{Y}(z)}{\underline{X}(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i\, z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} b_i\, z^{-i}} \qquad (b_0 = 1)$$

$\underline{H}(z) = \underline{H}_1(z)\,\underline{H}_2(z)$ wird für $b_0 = 1$ durch die Struktur nach Bild 7.11 ohne Einschränkungen für die Elemente realisiert. Diese Form ist die kanonische Form des nichtrekursiven Filters.
Daß das Filter mit der Struktur nach Bild 7.11 nichtrekursiv ist, ist ohne weiteres erkennbar. Kanonisch bedeutet hier, H(z) ist mit einem Minimum an Elementen realisiert.
Durch geeignete Wahl der Koeffizienten a_0 bis a_N und b_1 bis b_N in den Strukturen der Bilder 7.10 und 7.11 können den Filtern Bandpaß-, Bandsperren-, Hochpaß- oder Tiefpaßeigenschaften gegeben werden. Da z^{-1} der Verzögerung eines Abtastintervalles entspricht, kann durch Änderung der Abtastfrequenz das Filter leicht in einen anderen Frequenzbereich transponiert werden. Wird zum Beispiel die Abtastfrequenz verdoppelt, dann arbeitet das Filter mit der gleichen relativen Bandbreite bei einer eine Oktave höher liegenden Mittenfrequenz.
Die Strukturen nach Bild 7.10 und Bild 7.11 sind jedoch im allgemeinen für eine Realisierung nicht optimal. Es ergeben sich Schwierigkeiten bei dicht benachbarten Polen und Nullstellen. Die einschlägige Fachliteratur gibt Hinweise für günstigere Strukturen.

Zusammenhang zwischen ZT und DFT

Wir vergleichen die Definitionen

$$\underline{X}(z) = \mathrm{ZT}\; x(k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)\, z^{-k} \,,$$

$$\underline{X}(n) = \mathrm{DFT}\; x(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, W^{-nk} \quad \text{mit} \quad W = e^{j\frac{2\pi}{N}} \,.$$

Die ZT bildet mit $z = e^{j\omega\Delta t}$ die Abtastwerte auf den Einheitskreis ab, die DFT auf diskrete Punkte des Einheitskreises: $W^{-n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$. Der Unterscheidungsfaktor $\frac{1}{N}$ ist unwesentlich. ZT und DFT unterscheiden sich also im wesentlichen durch kontinuierliches bzw. diskretes Spektrum.

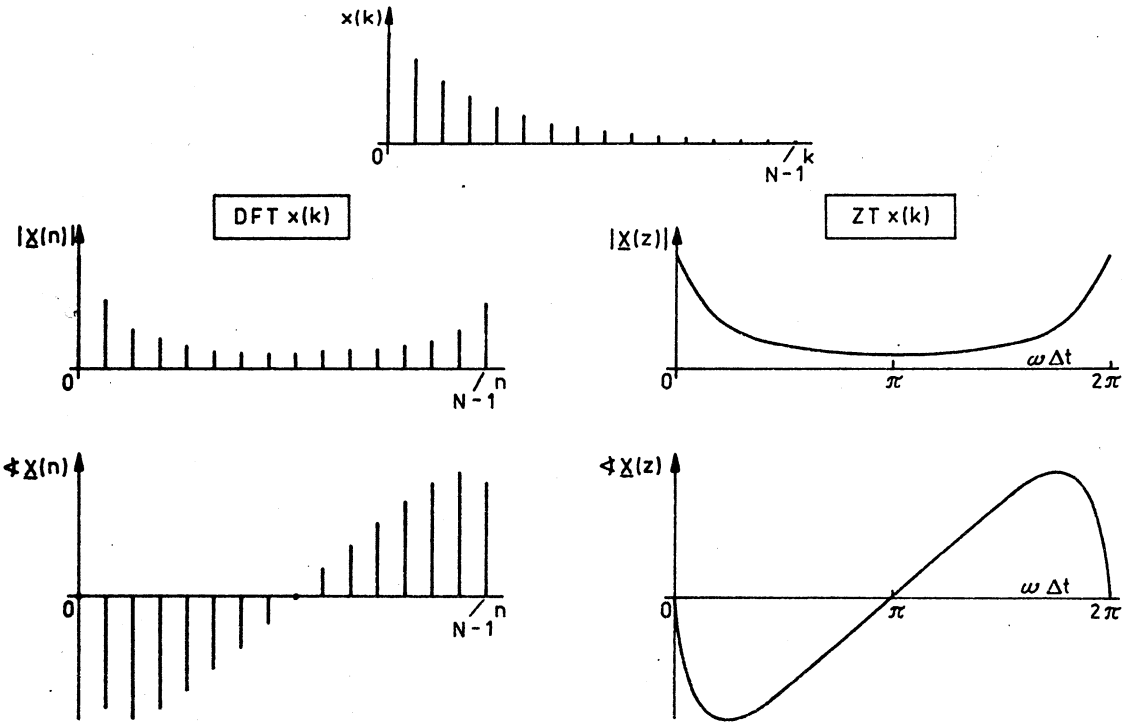


Bild 7.12 Vergleich DFT - ZT
Abtastwerte der Zeitfunktion $x(k) = a^k$ für $0 \leq k \leq N-1$, $x(k) = 0$ sonst,

$$\underline{X}(n) = \text{DFT } x(k) = \frac{1 - a^N}{1 - a\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n}} \qquad \underline{X}(z) = \text{ZT } x(k) = \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - a\, z^{-1}} \quad \text{mit} \quad z = e^{j\frac{2\pi}{N}}.$$

für $0 \leq n \leq N-1$,

Beispiel:

Gegeben seien die Abtastwerte einer Zeitfunktion

$$x(k) = a^k \text{ für } 0 \leq k \leq N-1 ,$$

$$x(k) = 0 \quad \text{sonst.}$$

$$ZT\ x(k) = \underline{X}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a^k z^{-k} = \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - a z^{-1}} ,$$

$$DFT\ x(k) = \underline{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^k e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} ,$$

$$\underline{X}(n) = \frac{1 - a^N}{1 - a e^{-j \frac{2\pi}{N} n}} \quad \text{mit} \quad 0 \leq n \leq N-1 .$$

Bild 7.12 zeigt das diskrete Betrags- und Phasenspektrum der DFT und die kontinuierlichen Spektren der ZT.

8. Cepstrumanalyse

Die Cepstrumanalyse (Cepstrum - Paraphrase zu spectrum) wird in der Sprachanalyse, in der Maschinendiagnostik, bei der Schallquellenanalyse, bei der Auswertung seismischer Signale, bei geologischen und hydroakustischen Messungen, in der Lautsprechermeßtechnik und auf anderen Gebieten angewandt (Randall, Hee (1981)).

Es gibt unterschiedliche Definitionen für das Cepstrum, die sich aber alle nur wenig voneinander unterscheiden. Es wird hier als Cepstrum die Fourierrücktransformierte der Leistungsdichte S(f) definiert:

$$C(\tau) = FT^{-1} \{ \lg S(f) \} . \qquad (8.1)$$

Da S(f) und somit lg S(f) symmetrische Funktionen sind, wird

$$C(\tau) = 2 \int_0^\infty \lg S(f) \cos 2\pi f \, df . \qquad (8.2)$$

Die unabhängige Variable des Cepstrums hat die Dimension einer Zeit. Sie wird als Quefrenz (Paraphrase zu Frequenz) bezeichnet.

Es ist auch möglich, die Dimension des Cepstrums in dB/s anzugeben.
Die häufig auch verwendete Definition mit der Fouriertransformierten (FT) an Stelle der Rücktransformierten in Gl. (8.1) ist bei Anwendung auf symmetrische Funktionen mit der hier verwendeten gleichbedeutend. Gl. (8.2) ist also auch bei dieser anderen Definition gültig.

Die Besonderheiten der Cepstrumanalyse sollen an einem Modell nach Bild 8.1 erläutert werden.

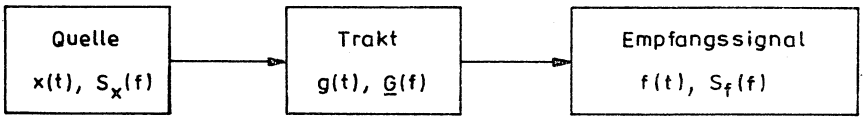


Bild 8.1 Modell zur Erläuterung der Eigenschaften des Cepstrums

x(t), f(t)	Zeitverlauf von Quell- bzw. Empfangssignal
$S_x(f)$, $S_f(f)$	Leistungsdichte von Quell- bzw. Empfangssignal
g(t), $\underline{G}(f)$	Gewichts- bzw. Obertragungsfunktion des Traktes

Eine Quelle erzeugt ein unbekanntes Ursprungssignal x(t), das kann zum Beispiel die Vokalquelle bei stimmhafter Sprache sein, der Verlauf von Bodenschwingungen am Ursprungsort eines Erdbebens oder auch der Schwingungsverlauf eines zu kontrollierenden Maschinenteiles.
Das Signal wird über einen "Trakt", das sei eine Struktur mit linearer Obertragungscharakteristik, weitergeleitet. Die Obertragungseigenschaften des Traktes vom Ursprungsort des Quellsignals x(t) bis zum Empfangsort mit dem Empfangssignal f(t) werden durch die Gewichtsfunktion g(t) bzw. die Obertragungsfunktion $\underline{G}(f)$ des Traktes gekennzeichnet. Das Signal am Empfangsort entsteht entweder durch Faltung des Quellsignals x(t) mit der Impulsantwort des Traktes, oder man erhält die Amplitudendichte des Empfangssignals durch Multiplikation der Amplitudendichte des Quellsignals mit der Obertragungsfunktion des Traktes:

$$\mathrm{FT}\ f(t) = \underline{X}(f)\ \underline{G}(f)\ .$$

Enthält das Quellsignal periodische Anteile, dann treten im Leistungsdichtespektrum Bestandteile bei den Harmonischen der Grundfrequenz $\frac{1}{T}$ auf, wenn T die Periode der Grundfrequenz ist. Durch Fourieranalyse des Leistungsdichteverlaufes kann diese Periodizität gemessen werden. Die Fourierrücktransformierte der Leistungsdichte ist die Autokorrelationsfunktion (siehe Abschnitt 9.2.3.)

$$\psi_f(\tau) = FT^{-1}\, S_f(f),$$

wenn $S_f(f)$ die Leistungsdichte der Ausgangszeitfunktion ist. Da sowohl Leistungsdichte als auch Autokorrelationsfunktion symmetrische Funktionen sind, unterscheiden sich Fourierrücktransformierte und Fouriertransformierte wiederum nicht.
Nun ist

$$S_f(f) = S_x(f)\, |\underline{G}(f)|^2,$$

wenn $S_x(f)$ die Leistungsdichte des Quellsignals x(t) und
$\underline{G}(f) = FT\ g(t)$ die Übertragungsfunktion des Vokaltraktes ist.

Damit wird

$$\psi_f(\tau) = FT^{-1} \left\{ S_x(f)\, |\underline{G}(f)|^2 \right\}$$

$$= FT^{-1} \left\{ S_x(f) \right\} * FT^{-1} \left\{ |\underline{G}(f)|^2 \right\},$$

$$\psi_f(\tau) = \psi_x(\tau) * \psi_g(\tau)$$

mit $\psi_x(\tau)$ Autokorrelationsfunktion von x(t),
$\psi_g(\tau)$ Autokorrelationsfunktion am Ausgang des Vierpoles mit der Übertragungsfunktion $\underline{G}(f)$, an dessen Eingang ein weißes Rauschen mit der Leistungsdichte $S_e(f) = 1$ liegt.

In der Autokorrelationsfunktion $\psi_f(\tau)$ sind also die Autokorrelationsfunktion des Quellsignals und die der Impulsantwort des Traktes durch die Faltungsoperation in komplizierter Weise miteinander verknüpft.

Schreibt man dagegen

$$lg\ S_f(f) = lg \left[S_x(f)\, |\underline{G}(f)|^2 \right] = lg\ S_x(f) + lg\, |\underline{G}(f)|^2$$

und bildet die Fourierrücktransformierte oder die Fouriertransformierte, was ja hier gleichbedeutend ist,

$$FT\left\{\lg S_f(f)\right\} = FT\left\{\lg S_x(f)\right\} + FT\left\{\lg |\underline{G}(f)|^2\right\}, \qquad (8.3)$$

so überlagern sich in Gl. (8.3) Quell- und Trakteffekt additiv und können leicht voneinander eliminiert werden. Die Cepstrumanalyse erlaubt also eine relativ einfache Rückfaltung.

Die Cepstrumanalyse soll noch einmal anschaulich am Beispiel der Analyse von stimmhafter Sprache erläutert werden. Beim stimmhaften Sprechen erzeugt eine Vokalquelle ein Quellsignal x(t), indem periodische Luftstöße durch die Stimmbänder hindurchgelassen werden. Die Sprachquelle besteht damit beim stimmhaften Sprechen aus einem quasiperiodischen Signal.
Bild 8.2 zeigt die Ergebnisse einer Kurzzeitanalyse des englisch gesprochenen "azor" aus "razor". Das Sprachsignal wurde bei der Analyse auf einen Tiefpaß mit einer Grenzfrequenz von 4 kHz gegeben und mit einer Abtastfrequenz von 10 kHz abgetastet. Für die Analyse wurde ein Hanning-Fenster von 40 ms Dauer verwendet. Die Analyse wurde alle 10 ms durchgeführt. Sie erfolgte auf einem Rechner. Im Bild 8.2a ist der Pegel der Leistungsdichte abgebildet, im Bild 8.2b das Cepstrum. Hier wurde allerdings, abweichend von Gl. (8.1), eine Definition für das Cepstrum gewählt, bei der die rechte Seite noch quadriert wurde.
In den Cepstrumverläufen ist der periodische Anteil der Vokale, also die Stimmhöhe des Sprechenden bei etwa $\tau = 6{,}5$ ms bis 8,5 ms, das entspricht f = 120 Hz bis 150 Hz, deutlich zu erkennen.
Cepstrumanalyse wird in der Seismologie, in der geologischen Erkundung und bei hydroakustischen Ortungen in der See zur Echofindung und zur Messung von Echozeiten für Ortungszwecke verwendet, aber auch zur Abtrennung von Echos vom Spektrum eines zu ortenden oder zu analysierenden Signals. Die Trennung von Quellsignal und Trakteinfluß durch Cepstrumanalyse kann in den schon genannten Anwendungsgebieten ebenfalls von Bedeutung sein, sie ist es aber vor allen Dingen in der Lärmbekämpfung und in der Maschinendiagnostik.

Seltener als das mit Gl. (8.1) definierte Cepstrum, das auf die reellwertige Leistungsdichte angewandt wird, wird das sog. kom-

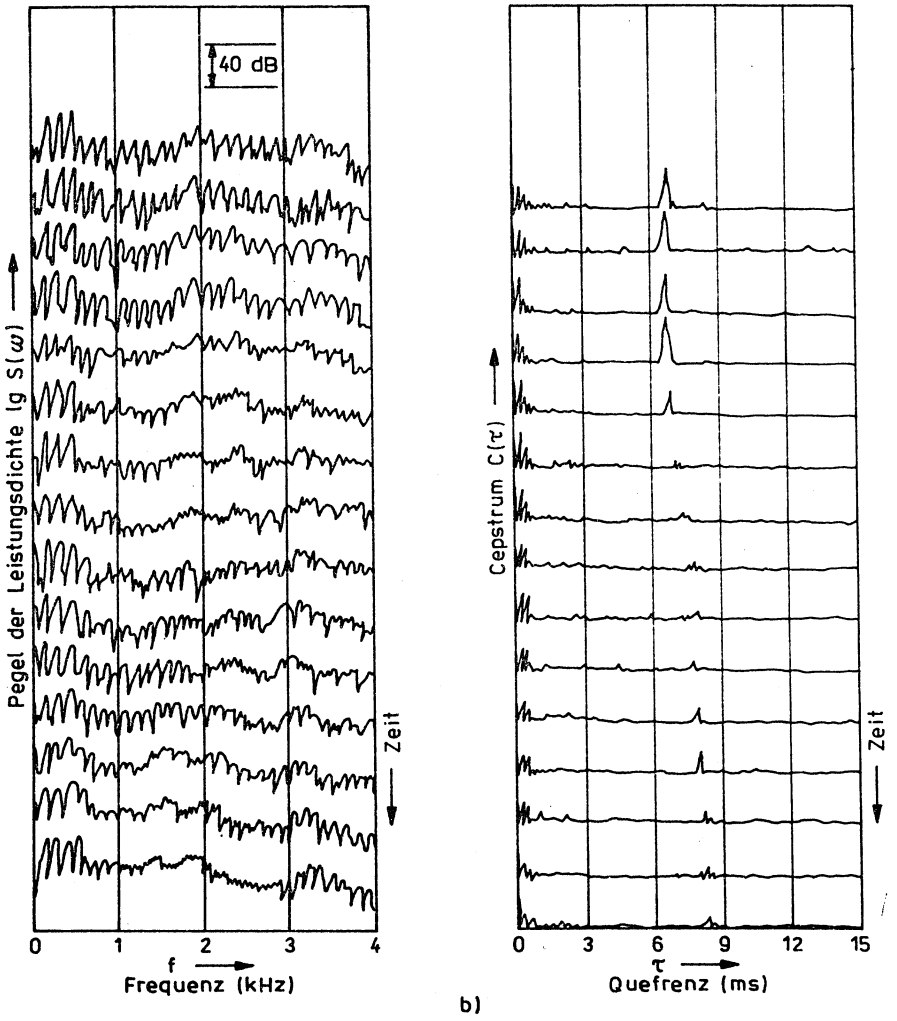


Bild 8.2 Kurzzeitanalyse des englisch gesprochenen azor aus razor nach Noll (1967)

a) Pegel der Leistungsdichte

b) Cepstrum
Analyse in Schritten von 10 ms mit Hanning-Zeitfenster von 40 ms Dauer

plexe Cepstrum auf komplexe Frequenzfunktionen angewendet. Als komplexes Cepstrum wollen wir definieren

$$C_c(\tau) = FT^{-1} \{ \lg \underline{X}(f) \} , \qquad (8.4)$$

wobei $\underline{X}(f) = FT\ x(t)$ die Fouriertransformierte der Zeitfunktion $x(t)$ ist.

Ist $x(t)$ eine kausale Funktion, z. B. die Gewichtsfunktion eines Zweitorsystems, dann ist $\underline{X}(f)$ die komplexe Übertragungsfunktion,

$$\underline{X}(f) = |\underline{X}(f)| \ e^{j\Phi(f)} .$$

Es wird dann

$$\lg \underline{X}(f) = \lg |\underline{X}(f)| + j\,\Phi(f) . \qquad (8.5)$$

Ist $x(t)$ eine reellwertige Funktion (die Gewichtsfunktion ist es immer), dann ist

$$\underline{X}(-f) = \underline{X}^*(f) .$$

Somit ist $\Phi(f)$ eine schiefsymmetrische Funktion,

$$\Phi(-f) = -\Phi(f) ,$$

und $C_c(\tau)$ als Fourierrücktransformierte von Gl. (8.5) wird wieder eine reellwertige Funktion, im Widerspruch zur üblichen Bezeichnung als komplexes Cepstrum.

Das komplexe Cepstrum ist zum Beispiel geeignet, bei Lautsprechermessungen unter Einfluß störender Wandreflexionen die Echostörungen zu eliminieren (Randall, Hee (1981)).

9. Kennzeichnung von Signalen durch statistische Kenngrößen

Wir hatten uns in den letzten Abschnitten vorwiegend mit solchen Signalen beschäftigt, die mit begrenztem Aufwand vollständig beschreibbar sind. So genügt es für eine periodische Funktion, den Zeitverlauf in einer Periode vollständig zu beschreiben. Bei einer Kategorie von Signalen hatten wir uns durch die Forderung der Betragsintegrierbarkeit aus der meßtechnischen Sicht von vornherein auf zeitbegrenzte Signale beschränkt. Auch diese Signale sind mit begrenztem Aufwand vollständig beschreibbar. Mit der Einführung der Leistungsdichte hatten wir bereits im letzten Abschnitt eine Kategorie von Vorgängen kennengelernt, die in ihrem genauen zeitlichen Verlauf vollständig nicht beschreibbar ist. Es handelt sich um regellose Vorgänge. Mit ihnen wollen wir uns hier näher befassen. Wir beschränken uns hierbei auf stationäre regellose Vorgänge. Die Kenngrößen, die wir zur Beschreibung von regellosen Vorgängen einführen, werden wir in der Meßtechnik häufig mit großem Vorteil auch für die Beschreibung regelmäßiger Vorgänge, z. B. periodischer Vorgänge, verwenden, meist allerdings dann, wenn regelmäßige Vorgänge mit regellosen überlagert auftreten.

9.1. Allgemeine Eigenschaften stationärer ergodischer Vorgänge

Unter regellosen Vorgängen sollen solche Vorgänge verstanden werden, die analytisch nicht beschreibbar sind, bei denen also auch bei genauer Kenntnis des vergangenen Ablaufes der künftige nicht vorausgesagt werden kann. Ein solcher Vorgang kann etwa nach Bild 9.1 verlaufen.

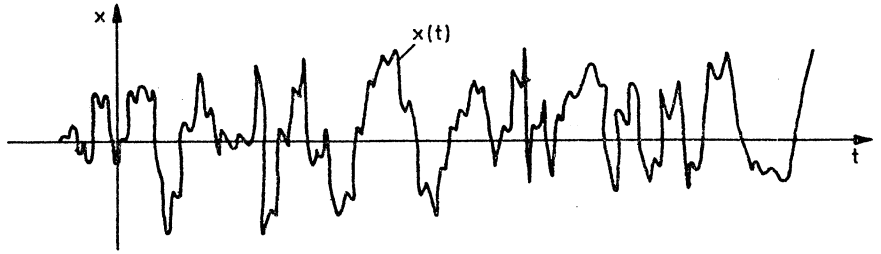


Bild 9.1 Typisches regelloses Signal

Sind Vorgänge stationär, dann sind statistische Aussagen möglich. Ein Vorgang ist in der technischen Interpretation stationär, wenn der zeitliche Mittelwert und die Autokorrelationsfunktion (siehe hierzu Abschnitt 9.2.) unabhängig von der Zeit sind, zu der der Mittelwert und die Autokorrelationsfunktion gebildet werden.

In der Praxis ist über die Stationärität eines Vorganges häufig schwer zu entscheiden, weil nicht von vornherein angegeben werden kann, über welchen Zeitabschnitt der Mittelwert und die Autokorrelationsfunktion mindestens gebildet werden müssen.

In der theoretisch orientierten Literatur werden aus mathematischen Gründen die behandelten stationären Vorgänge auf ergodische Vorgänge eingeengt.

Wir nehmen an, eine Zufallsfunktion X(t), die für einen regellosen Vorgang stehen soll, gehöre zu einem Ensemble im statistischen Sinne gleichartiger Funktionen,

$$X_1(t),\ X_2(t),\ X_3(t),\ \ldots,\ X_\nu(t),\ \ldots = \{X_\nu(t)\}\ ,$$

wobei die Zahl der Ensemblefunktionen unendlich groß sein soll. Bei ergodischen Funktionen können statistische Aussagen entweder aus dem zeitlichen Verlauf eines Repräsentanten $X_\nu(t)$ gewonnen werden oder aus allen $X_\nu(t)$ des Ensembles zu gleichen Zeiten $t = t_0$.

Interpretieren wir die Ergodizität an einem Beispiel. An elektrischen Widerständen tritt ein sog. Widerstandsrauschen auf. Das heißt, an den Klemmen eines Widerstandes kann man eine sehr geringe regellose Spannung messen. Stellen wir uns eine sehr große Zahl genau gleichartiger Widerstände vor. Wir könnten den Effektivwert der Rauschspannung so ermitteln, daß wir an einem ausgewählten Widerstand die auftretende Rauschspannung zu einer großen Zahl verschiedener Zeiten messen und aus allen gemessenen Spannungswerten den quadratischen Mittelwert bilden, oder wir messen gleichzeitig an sehr vielen der gleichartigen Widerstände die Spannung und bilden hieraus den quadratischen Mittelwert. Man erhält in beiden Fällen den gleichen Wert.

9.2. Korrelationsfunktionen

9.2.1. Erläuterung des Begriffes Korrelationsfunktion

Die Korrelationsanalyse hat sich aus dem Bestreben entwickelt, in den verschiedenen Wissensgebieten, wie Medizin, Biologie, Agrarwissenschaft, Vererbungslehre, Marktwissenschaft, Psychologie, nach inneren Zusammenhängen zwischen zwei unterschiedlichen Beobachtungsreihen zu suchen, z. B. nach den Zusammenhängen zwischen dem Ernteertrag in einem bestimmten Landschaftsgebiet und der Niederschlagsmenge in den Wintermonaten. Sie hat seit den 50er Jahren erhebliche Bedeutung in zahlreichen Zweigen der Technik erlangt, in denen zufällig schwankende Größen auftreten, z. B. in der Meßtechnik, Regelungstechnik, der Ortungstechnik. Die Bilder 9.2a und 9.2b zeigen jeweils zwei Zeitfunktionspaare mit unterschiedlicher gegenseitiger Abhängigkeit. Im Bild 9.2a ist ein Zusammenhang zwischen den Zeitfunktionen x(t) und y(t) offensichtlich, dagegen ist ein Zusammenhang im Bild 9.2b kaum zu vermuten. Es ist eine Aufgabe der Korrelationsanalyse, solche

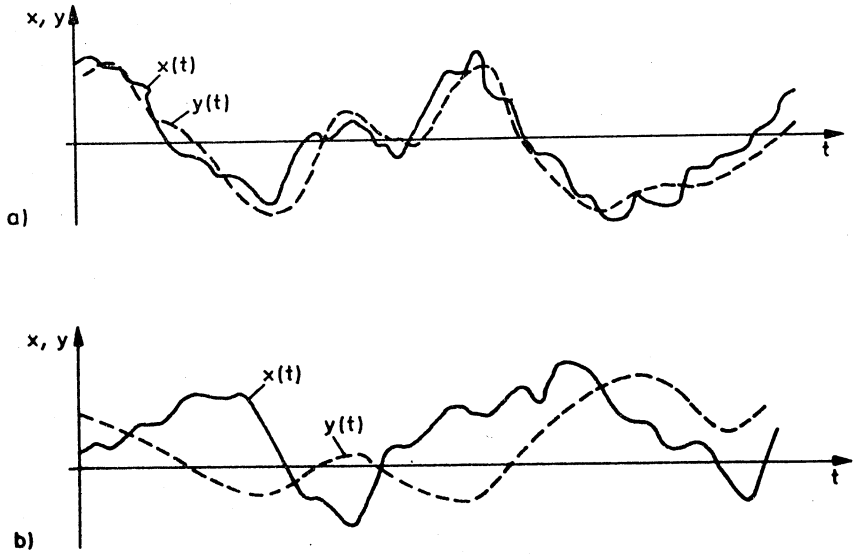


Bild 9.2 Zeitfunktionspaare mit unterschiedlicher gegenseitiger Abhängigkeit

Zusammenhänge zu erkennen und quantitativ zu erfassen. Es werden im folgenden nur die Grundzüge der Korrelationsanalyse angegeben; im übrigen wird auf Lange (1973) verwiesen.

Es wird angenommen, daß der Mittelwert zweier Zeitfunktionen im interessierenden Zeitbereich $-T \leq t \leq T$ verschwindet, d. h., $\overline{x(t)} = 0$, $\overline{y(t)} = 0$.

Es ist offensichtlich, daß der Mittelwert des Produktes der Momentanwerte $x(t)\ y(t)$ Zusammenhänge zwischen den Zeitfunktionen $x(t)$ und $y(t)$ erkennen läßt, wenn diese Zusammenhänge zum jeweils gleichen Zeitpunkt bestehen. Sehr häufig treten aber zeitverschobene Beziehungen auf, d. h., es besteht ein Zusammenhang zwischen $x(t)$ und $y(t \pm \tau)$. Zum Beispiel wird der Schalldruck in unmittelbarer Nähe einer Schallquelle zum Schalldruck an einem anderen Ort, herrührend von der gleichen Quelle, in einem zeitlichen Zusammenhang stehen, der durch den Laufzeitunterschied bestimmt wird.

Zusammenhänge zwischen zwei Zeitfunktionen mit beliebiger Zeitdifferenz läßt die Korrelationsfunktion erkennen:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\ y(t \pm \tau)\ dt\ . \qquad (9.1)$$

Gl. (9.1) wird für $x(t) \neq y(t)$ häufig Kreuzkorrelationsfunktion genannt.

In Gl. (9.1) bedeutet τ bei positivem Vorzeichen in der Klammer eine Verschiebungsvariable. Wie Bild 9.3a zeigt, wird $y(t)$ bei

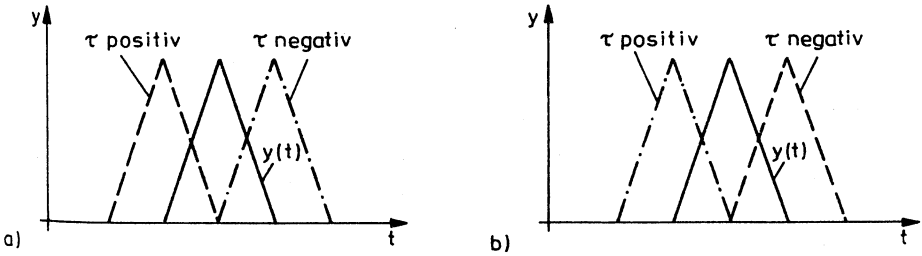


Bild 9.3 Darstellung der Zeitverschiebung $y(t \pm \tau)$ an einem Dreieckimpuls
a) $y(t + \tau)$ b) $y(t - \tau)$

positivem τ zu früheren Zeiten hin verschoben, dagegen wird es bei negativem τ verzögert.
Ist in Gl. (9.1) das Vorzeichen von τ negativ, dann hat τ die Bedeutung einer Verzögerungsvariablen. Ist τ positiv, dann wird nach Bild 9.3b y(t) verzögert.
Beide Darstellungen der Korrelationsfunktion sind gleichberechtigt. Es ist $\psi_{xy(+)}(\tau) = \psi_{xy(-)}(-\tau)$.

Kommen wir noch einmal auf das Beispiel zurück. Die Korrelationsfunktion, gebildet aus dem Schalldruckzeitverlauf an einem Ort A ($p_A(t)$) und dem Schalldruckverlauf an einem Ort B ($p_B(t)$), wird ein deutliches Maximum bei $\tau = \Delta t$ bzw. $\tau = -\Delta t$ zeigen, wenn der Schall an beiden Orten von der gleichen Quelle herrührt und Δt der Laufzeitunterschied bei der Schallausbreitung ist. Weitab von diesem Maximum wird die Korrelationsfunktion verschwinden, wenn der von der Schallquelle erzeugte Schalldruckverlauf nicht periodisch ist.

9.2.2. Die Autokorrelationsfunktion

Für x(t) = y(t) ergibt sich die Autokorrelationsfunktion:

$$\psi_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\, x(t \pm \tau)\, dt \,. \qquad (9.2)$$

Die Autokorrelationsfunktion für $\tau = 0$ entspricht dem quadratischen Mittelwert, also dem Quadrat des Effektivwertes der Funktion x(t):

$$\tilde{x}^2 = \overline{x^2(t)} = \psi_{xx}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t)\, dt \,.$$

$\psi_{xx}(0)$ ist immer positiv. Außerdem hat die Autokorrelationsfunktion bei $\tau = 0$ immer ihren größten Wert:

$$\psi_{xx}(0) = \tilde{x}^2 \geq |\psi(\tau)| \,.$$

Vielfach wird die normierte Korrelationsfunktion angegeben:

$$\varrho(\tau) = \frac{\psi_{xx}(\tau)}{\psi_{xx}(0)} .$$

Die Autokorrelationsfunktion ist immer eine gerade symmetrische Funktion:

$$\psi_{xx}(\tau) = \psi_{xx}(-\tau) . \qquad (9.3)$$

9.2.3. Zusammenhang zwischen Leistungsspektrum und Korrelationsfunktion

Die Autokorrelationsfunktion für $\tau = 0$ entspricht dem Effektivwert und somit dem Zeitintegral über die Leistungsdichte:

$$\psi_{xx}(0) = \tilde{x}^2 = \overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, d\omega = \int_{0}^{\infty} w(f)\, df .$$

Ein allgemeiner Zusammenhang zwischen Korrelationsfunktion und Leistungsdichte wurde von Wiener und Khintchine angegeben (Schlitt (1968), Lange (1973)):

$$\psi_{xy}(\tau) = FT^{-1}\, \underline{S}_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}_{xy}(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega , \qquad (9.4)$$

$$\underline{S}_{xy}(\omega) = FT\ \psi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{xy}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau . \qquad (9.5)$$

Die Leistungsdichte ist also die Fouriertransformierte der Korrelationsfunktion. Es besteht damit ein eindeutiger und umkehrbarer Zusammenhang zwischen Leistungsdichte und Korrelationsfunktion. Die Korrelationsfunktion enthält nicht mehr und nicht weniger Information über ein Signal als die Leistungsdichte. Man kann nur, vom Anwendungsfall abhängig, mitunter aus der Leistungsdichte, in anderen Fällen aus der Korrelationsfunktion einfacher, zumindest anschaulicher, strukturelle Einzelheiten der zu analysierenden Zeitfunktion erkennen. Die Leistungsdichte eines einzelnen Vorganges und die Autokorrelationsfunk-

tion sind nach den Gleichungen (3.27) und (9.3) symmetrische Funktionen: $S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega)$, $\psi_{xx}(\tau) = \psi_{xx}(-\tau)$. Für sie kann an Stelle der Gleichungen (9.4) und (9.5) geschrieben werden:

$$\psi_{xx}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_{xx}(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega \,, \qquad (9.6)$$

$$S_{xx}(\omega) = 2 \int_0^\infty \psi_{xx}(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau \,.$$

Die Leistungsdichte eines einzelnen Vorganges ist somit eine reelle Funktion. (Es wird hier die Leistungsdichte eines Vorganges zur Unterscheidung von Kreuzleistungsdichten $\underline{S}_{xy}(\omega)$ mit $S_{xx}(\omega)$ bezeichnet. Wenn $S(\omega)$ durch einen Index nicht besonders gekennzeichnet wird, soll immer $S_{xx}(\omega)$ gemeint sein.)

Für Kreuzkorrelationsfunktionen, die gegenseitige Abhängigkeiten zweier Vorgänge kennzeichnen, kann man die Transformationen Gl. (9.4) und Gl. (9.5) ebenfalls anwenden. Hier wird aber im allgemeinen die Kreuzleistungsdichte komplex.

Zwischen Kreuzkorrelationsfunktion, Kreuzleistungsdichte und den Amplitudendichten der zwei Zeitvorgänge gelten die Zusammenhänge

$$\underline{S}_{xy}(\omega) = \mathrm{FT}\, \psi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \underline{X}_T^*(\omega) \, \underline{Y}_T(\omega),$$

$$\underline{S}_{yx}(\omega) = \mathrm{FT}\, \psi_{yx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \underline{X}_T(\omega) \, \underline{Y}_T^*(\omega),$$

$\underline{X}_T(\omega)$ Amplitudendichte eines Zeitabschnittes T von x(t),

$\underline{Y}_T(\omega)$ Amplitudendichte eines Zeitabschnittes T von y(t).

9.2.4. Die Autokorrelationsfunktion der periodischen Zeitfunktion

Ist eine Zeitfunktion periodisch, dann ist auch ihre Autokorrelationsfunktion periodisch. Die Periode im Verschiebungsbereich ist ebenso groß wie die Periode der Zeitfunktion.
Für die sinusförmige Zeitfunktion

wird

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \hat{x}\cos(\omega t + \varphi), \\ \psi(\tau) &= \frac{\hat{x}^2}{2}\cos\omega\tau = \tilde{x}^2\cos\omega\tau, \\ \varrho(\tau) &= \cos\omega\tau. \end{aligned}}$$

Für sinusförmige Zeitvorgänge hat die Autokorrelationsfunktion somit nicht nur die gleiche Periodizität, sondern ebenfalls wieder sinusförmigen Verlauf, wobei allerdings die Phaseninformation verlorengegangen ist.

Nichtsinusförmige periodische Zeitfunktionen können nach Gl. (3.1) in harmonische Bestandteile zerlegt werden:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{X}_n\, e^{jn\omega t} = x_- + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,|\underline{X}_n|\cos(n\omega t + \varphi_n)$$

bzw. $x(t) = x_- + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$.

Es wird dann

$$\psi(\tau) = x_-^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{c}_n^2}{2}\cos n\omega\tau = x_-^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n^2 \cos n\omega\tau .$$

Für nichtsinusförmige Zeitfunktionen hat die Autokorrelationsfunktion eine Abhängigkeit von der Verschiebungsvariablen, die sich von der Zeitabhängigkeit der Ausgangszeitfunktion unterscheidet. Sie stellt immer eine Beziehung dar, die nur von den Beträgen der Spektralanteile, nicht aber von ihrer Phase abhängt. Werden beispielsweise zwei periodische Zeitfunktionen verglichen, die gleiches Amplituden-, aber unterschiedliches Phasenspektrum besitzen, somit auch unterschiedlichen Zeitverlauf, so haben beide Zeitfunktionen die gleiche Autokorrelationsfunktion.

9.2.5. Die Autokorrelationsfunktion des Bandpaßrauschens

Die Leistungsdichte einer Zeitfunktion sei im Frequenzbereich f_u bis f_o konstant und außerhalb dieses Frequenzbereiches verschwindend klein:

$$w(f) = w_0 \qquad \text{für} \qquad f_u \leqq f \leqq f_o \,,$$
$$w(f) = 0 \qquad \text{sonst.}$$

Einen solchen Verlauf der Leistungsdichte erhält man zum Beispiel näherungsweise am Ausgang eines Bandfilters, wenn am Eingang eine Rauschspannung anliegt.

Aus Gl. (9.6) folgt

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_0^\infty w(f) \cos \omega \tau \, df$$

und somit für die vorgegebene Leistungsdichte

$$\varphi_{xx}(\tau) = w_0 \int_{f_u}^{f_o} \cos \omega \tau \, df \,,$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{w_0}{2 \pi \tau} (\sin 2 \pi f_o - \sin 2 \pi f_u) .$$

Mit

$\Delta f = f_o - f_u$ Filterbreite,

$f_m = \frac{f_o + f_u}{2}$ Filtermittenfrequenz,

$\operatorname{si} x = \frac{\sin x}{x}$ Spaltfunktion

wird

$$\varphi_{xx}(\tau) = w_0 \, \Delta f \, \operatorname{si}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta f}{f_m} \cdot 2 \pi f_m \tau\right) \cos (2 \pi f_m \tau) . \qquad (9.7)$$

Die zu Gl. (9.7) gehörige normierte Autokorrelationsfunktion

$$\varrho(\tau) = \operatorname{si}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta f}{f_m} \cdot 2 \pi f_m \tau\right) \cos (2 \pi f_m \tau)$$

ist im Bild 9.4 für die relativen Filterbreiten $\frac{\Delta f}{f_m} = 0{,}23$ (Terzfilter), $\frac{\Delta f}{f_m} = 0{,}67$ (Oktavfilter) und $\frac{\Delta f}{f_m} = 2$ (Tiefpaßfilter) dargestellt. Je breiter das Filter, auf einen um so schmaleren Verschiebungsbereich $f_m \tau$ erstreckt sich die Autokorrelationsfunktion, denn die Spaltfunktion $\operatorname{si} x = \frac{\sin x}{x}$ geht mit zuneh-

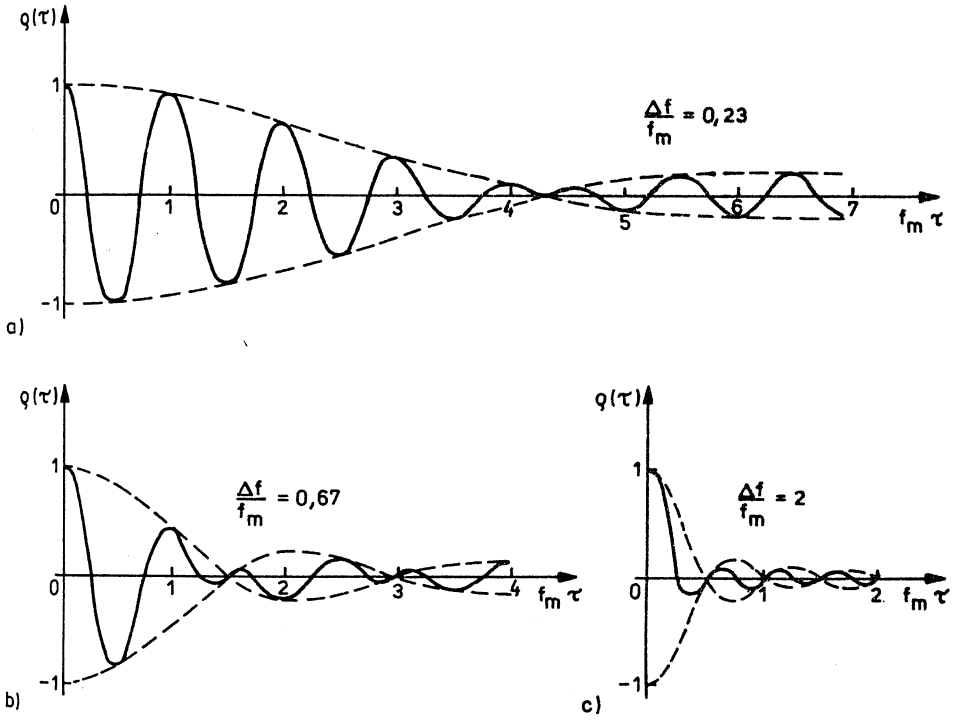


Bild 9.4 Korrelationsfunktion des vom idealen Bandpaß begrenzten Rauschens

a) Terzfilter, $f_o = \sqrt[3]{2}\, f_u$, $\frac{\Delta f}{f_m} = 0{,}23$

b) Oktavfilter, $f_o = 2\, f_u$, $\frac{\Delta f}{f_m} = 0{,}67$

c) Tiefpaß, $f_u = 0$, $\frac{\Delta f}{f_m} = 2$

(gestrichelte Linien: Hüllkurvenverlauf si $f_m \tau$)

mendem Argument gegen Null. Dagegen ist die Zeitfunktion nach der Bandbegrenzung wieder eine stationäre Funktion.

Es ist zu beachten, daß in der akustischen Meßtechnik als Filtermittenfrequenz von Filtern mit konstanter relativer Bandbreite ($\frac{\Delta f}{f_m}$ = konst., z. B. Terz- und Oktavfilter) die geometrische Mittenfrequenz, also $f_m = \sqrt{f_o\, f_u}$, angegeben wird.

9.2.6. Korrelation mit Modellfunktion (Musterkorrelation) und Mehrdeutigkeitsfunktion

Durch Vergleich eines Signals x(t) und eines Signals m(t) wird die Verwandtschaft der Signale geprüft. Der Vergleich kann durch Kreuzkorrelation erfolgen. Wird zum Beispiel in der Ortungstechnik ein von einem zu ortenden Objekt zurückgeworfenes Signal durch Korrelation mit dem zeitverzögerten Sendesignal, der Modellfunktion, auf Kohärenz geprüft, dann spricht man von Musterkorrelation. Die Musterkorrelation kann bei gestörten oder verrauschten Antwortsignalen zur Minderung des Störeinflusses genutzt werden.

Es ist

$$\psi_{xm}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\, m(t-\tau)\, dt,$$

x(t) zu analysierende Funktion (Antwortsignal),
m(t) Modellfunktion (Muster).

In der meßtechnischen Praxis kann eine Mittelwertbildung nur über eine endliche Zeit durchgeführt werden. Mitunter ist es sogar vorteilhaft, diese Zeit zu beschränken oder sogar kurz zu halten: bei nichtstationären Signalen.

Es wird dann die Kurzzeitkorrelation eingeführt:

$$\psi^{k}_{xm}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\, m(t-\tau)\, dt. \qquad (9.8)$$

Vergleichen wir die Kurzzeitkorrelation mit einer Modellfunktion m(t) nach Gl. (9.8) mit dem Faltungsintegral (siehe Anhang 2 im Lehrbrief 3) bei vertauschtem t und τ, ergibt sich

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, g_E(\tau - t)\, dt,$$

wobei $x(\tau)$ die Zeitfunktion am Eingang eines linearen Systems, $y(\tau)$ die Zeitfunktion am Ausgang des Systems und $g_E(t)$ die Gewichtsfunktion bedeuten. Ist $g_E(t) = m(-t)$, dann wird

$m(t - \tau) = g_E(\tau - t)$, und es ist

$$y(\tau) = 2\,T\,\psi^{k}_{xm}(\tau)\,.$$

Das heißt, die Kurzzeitkorrelation mit einer Modellfunktion ist gleichwertig mit einer Filterung des zu analysierenden Signals mit einem Filter, dessen Gewichtsfunktion dem am Zeitachsenursprung gespiegelten Verlauf der Modellfunktion entspricht. Man spricht von einem Optimalfilter.
Welche Obertragungsfunktion muß das Optimalfilter besitzen?

Für die Antwort des Filters auf den Einheitsstoß gilt

$$g_E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega)\; e^{j\omega t}\; d\omega\,.$$

Ist $\underline{M}(\omega)$ die Amplitudendichte der Modellfunktion, dann ist

$$m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{M}(\omega)\; e^{j\omega t}\; d\omega\,.$$

Aus $g_E(t) = m(-t)$ folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega)\; e^{j\omega t}\; d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{M}(\omega)\; e^{-j\omega t}\; d\omega\,.$$

$g_E(t)$ und $m(-t)$ sind reelle Funktionen. Es müssen somit die Realteile beider Integrale übereinstimmen. Das kann aber nur sein, wenn

$$\boxed{\underline{A}(\omega) = \underline{M}^{*}(\omega)\,.}$$

Der Frequenzgang des Optimalfilters muß also konjugiert komplex zur Amplitudendichte der Modellfunktion verlaufen.

Ein periodischer Vorgang besitzt ein Linienspektrum. Ein Optimalfilter für die Analyse eines periodischen Vorganges dürfte dann nur bei den Frequenzen durchlässig sein, die mit den Spektrallinien übereinstimmen. Man spricht in diesem Fall von "Kammfiltern".

In der Ortungstechnik werden Sendesignale verwendet, die aus Impulsen oder Impulsfolgen bestehen, wobei jeder Impuls noch eine Feinstruktur besitzen kann. Die Feinstruktur kann ein dem Impuls eingeschriebenes sinusförmiges Signal mit fester oder zeitvariabler Frequenz sein, sie kann auch eine andersartige Kodierung sein. Bewegt sich das Ortungsobjekt relativ zum Sender, dann treten die bekannten Dopplereffekte auf, d. h. Frequenzverschiebungen im reflektierten Signal. Es werden dann für die Analyse an Stelle von Autokorrelations- oder Musterkorrelationsfunktionen vorteilhaft sog. Mehrdeutigkeitsfunktionen bestimmt. Hierbei wird aus dem zu analysierenden reellwertigen Signal, durch Hinzufügen der Hilberttransformierten als Imaginärteil, eine analytische Funktion gebildet. Durch Integration über das Produkt aus Originalfunktion und zeitverschobener konjugiert komplexer Funktion, bei zusätzlicher Laufzeitverschiebung durch den Dopplereffekt, wird eine der Autokorrelationsfunktion verwandte Funktion, das ist die Mehrdeutigkeitsfunktion, gebildet (Barnick, Schommartz, Wendt (1984)).

9.2.7. Technische Realisierung

Bei der technischen Anwendung der Korrelationsanalyse ist davon auszugehen, daß die zu analysierenden Signale entweder zeitlich begrenzt sind oder lediglich über einen begrenzten Zeitraum ausgewertet werden.
Es wird dann (bei Fortlassung des Symbols für die Kurzzeitanalyse)

$$\psi_{xy}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\, y(t - \tau)\, dt$$

bzw. die normierte Korrelationsfunktion (bei Autokorrelation: $y(t) = x(t)$)

$$\varrho_{xy}(\tau) = k \int_{-T}^{+T} x(t)\, y(t - \tau)\, dt,$$

wobei k einen Normierungsfaktor darstellt, der umgekehrt proportional der Wurzel des Produktes der Energien von x(t) und y(t) im Zeitraum 2 T ist.

Bei der technischen Realisierung der Korrelation kann von einem Blockschaltbild nach Bild 9.5 ausgegangen werden. Bei der Autokorrelation sind die zwei Eingänge für x(t) und y(t) miteinander verbunden.

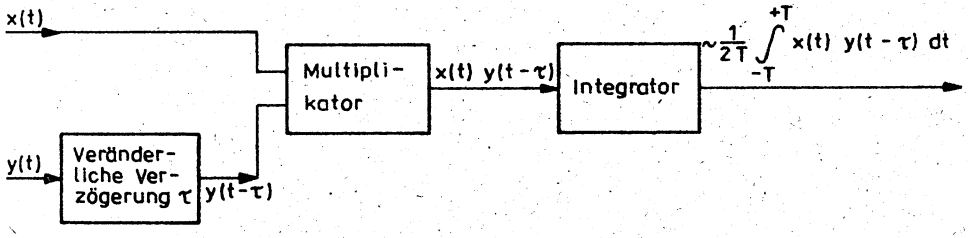


Bild 9.5 Blockschaltbild zur Realisierung der Kreuzkorrelation

Bei den in der Vergangenheit analogen Korrelatoren war es schwierig, die Zeitverzögerung τ zu realisieren. Es wurden elektrische Laufzeitketten mit diskreten Abgriffen, Magnetbandgeräte mit versetzten und verschiebbaren Köpfen und akustische Laufzeitketten verwendet.

In den letzten Jahren hat die digitale Verarbeitung bei den Korrelationsverfahren die analogen in zunehmendem Maße verdrängt.

Nach der Analog-Digital-Wandlung der Signale bereiten Zeitverschiebung, Multiplikation und Integration (Summation) keine Schwierigkeiten.